

Numerical analysis and simulation of the oscillatory pendulum through approximation methods for solving nonlinear ordinary differential equations

1^{er} Richar Marlon Mollinedo Chura

*Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
rmollinedo@unap.edu.pe*

2^{do} Eliseo Pumacallahui Salcedo

*Departamento Académico de Ciencias Básicas
Universidad Nacional Intercultural de Quillabamba
Quillabamba, Perú
eliseo.pumacallahui@uniq.edu.pe*

3^{er} Roger Ccama Alejo

*Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
rccama@unap.edu.pe*

4^{to} Fredy Gonzalo Copari Romero

*Departamento Académico de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Juliaca
Juliaca, Perú
fcopari@unaj.edu.pe*

5^{to} María Eugenia Mancilla Quispe

*Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
41646596@unap.edu.pe*

6^{to} Luz Marina Acero Coaquira

*Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
laceroc@unap.edu.pe*

Abstract—This paper addresses the numerical analysis of the oscillating pendulum model, described by nonlinear ordinary differential equations. It highlights that the numerical integration of such systems constitutes an essential tool to complement the analytical and qualitative analysis of their solutions, and in many cases, the only feasible approach to characterize their dynamic behavior. The main objective is to evaluate and compare the solution of the nonlinear model with that of the linear model for both small and large initial displacements, showing that linearization is only suitable as a local approximation around the stable equilibrium. For large amplitudes, the use of higher-order numerical methods becomes indispensable to preserve the stability and accuracy of the model, as well as to determine the differences between both approaches. Additionally, key aspects such as the propagation and estimation of numerical error and the stability of integration schemes are analyzed. Finally, computational simulations are implemented in Matlab in order to obtain numerical approximations of the solutions and to examine their dynamic behavior.

Keywords— Numerical integration; ordinary differential equations; oscillating pendulum; MATLAB software; numerical stability

Análisis y simulación numérica del péndulo oscilante mediante métodos de aproximación para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales

1^{ro} Richar Marlon Mollinedo Chura
Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
rmollinedo@unap.edu.pe

3^{ro} Roger Ccama Alejo
Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
rccama@unap.edu.pe

5^{to} María Eugenia Mancilla Quispe
Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
41646596@unap.edu.pe

2^{do} Eliseo Pumacallahui Salcedo
Departamento Académico de Ciencias Básicas
Universidad Nacional Intercultural de Quillabamba
Quillabamba, Perú
eliseo.pumacallahui@uniq.edu.pe

4^{to} Fredy Gonzalo Copari Romero
Departamento Académico de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Juliaca
Juliaca, Perú
fcopari@unaj.edu.pe

6^{to} Luz Marina Acero Coaquira
Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
laceroc@unap.edu.pe

Resumen—En el presente trabajo se aborda el análisis numérico del modelo del péndulo oscilante, descrito mediante ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, destacando que la integración numérica de estos sistemas constituye una herramienta esencial para complementar el análisis analítico y cualitativo de sus soluciones, y en muchos casos el único enfoque viable para caracterizar su comportamiento dinámico; el objetivo principal es evaluar y comparar la solución del modelo no lineal con la del modelo lineal para desplazamientos iniciales pequeños y grandes, evidenciando que la linealización resulta adecuada únicamente como una aproximación local alrededor del equilibrio estable, mientras que para amplitudes grandes el uso de métodos numéricos de orden superior es indispensable para preservar la estabilidad y precisión del modelo, así como para determinar las diferencias entre ambos enfoques; además, se analizan aspectos clave como la propagación y estimación del error numérico y la estabilidad de los esquemas de integración, y finalmente se implementan simulaciones computacionales en Matlab con el fin de obtener aproximaciones numéricas de las soluciones y examinar su comportamiento dinámico.

Palabras Clave— integración numérica, ecuaciones diferenciales ordinarias, péndulo oscilante, software Matlab, estabilidad numérica

I. INTRODUCCIÓN

El péndulo oscilante constituye uno de los sistemas dinámicos más estudiados en la física clásica y en el análisis matemático de sistemas no lineales, debido a que, pese a su

aparente simplicidad, describe un comportamiento gobernado por una ecuación diferencial ordinaria (EDO) no lineal de segundo orden. Desde los trabajos fundacionales de Isaac Newton en la formulación de las leyes del movimiento [1], el estudio del péndulo ha servido como modelo fundamental para comprender fenómenos oscilatorios en múltiples áreas de la ciencia e ingeniería.

La ecuación exacta del péndulo oscilante se expresa como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin x = 0$$

la cual es inherentemente no lineal debido al término $\sin x$. Para ángulos pequeños, la aproximación $\sin x \approx x$ permite linealizar el sistema, obteniendo una solución analítica cerrada que describe un movimiento armónico simple. Sin embargo, cuando las amplitudes iniciales son moderadas o grandes, esta aproximación pierde validez y el sistema debe analizarse mediante métodos más generales como métodos numéricos [2], [3].

El estudio sistemático de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales ha sido ampliamente desarrollado en la literatura matemática moderna [4], donde se demuestra que la mayoría de los sistemas físicos reales no admiten soluciones analíticas explícitas. En este contexto, los métodos numéricos como Runge-Kutta y Euler se han consolidado como herramientas

fundamentales para la simulación de sistemas dinámicos no lineales [3].

En particular, los métodos de aproximación numérica permiten no solo estimar soluciones con alta precisión, sino también analizar la estabilidad, la conservación de energía y el comportamiento cualitativo del sistema en el espacio de fases [3], [4]. El desarrollo histórico y formal de estos métodos ha consolidado su aplicación en problemas físicos donde las soluciones exactas no son accesibles.

El presente trabajo tiene como objetivo realizar un análisis comparativo entre distintas técnicas de aproximación aplicadas al péndulo oscilante, evaluando su precisión, estabilidad y eficiencia computacional. Asimismo, se desarrolla una simulación numérica que permite visualizar el comportamiento dinámico del sistema bajo diferentes condiciones iniciales, evidenciando las diferencias entre el modelo linealizado y la formulación no lineal completa.

II. MATERIALES

Comenzamos recordando la noción de problema de valor inicial, que es simplemente una ecuación diferencial junto con una condición inicial:

$$x' = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

donde $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ es una función continua definida en algún abierto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^{1+d}$ que contiene (t_0, x_0) [5]. En este trabajo asumiremos que F es localmente Lipschitz en x y por tanto admite exactamente una solución máxima $x : I \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Considere un intervalo cerrado $[t_0, t_0 + L]$ contenido en el dominio I de la solución máxima. Discretizaremos este conjunto, es decir, lo consideraremos subconjuntos finitos de puntos. $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + L$ que llamaremos *puntos de malla*. El número entero $N \geq 1$ es el tamaño de la cuadrícula y la diferencia $h = t_n - t_{n-1}$, $n = 1, \dots, N$, son los *tamaños de paso*, $h = L/N$.

A. Método de Euler

Comencemos visualizando (1) de forma geométrica. (Fig. 1). Para fijar ideas, consideraremos sólo ecuaciones diferenciales en dimensión $d = 1$, pero el caso general es análogo. Entonces, la condición inicial (t_0, x_0) es un punto en el plano, y la solución $x(t)$ de (1) corresponde a cierta curva en el plano que pasa por este punto. También sabemos que la inclinación de la curva en este punto viene dada por $x'(t_0) = F(t_0, x_0)$. La idea es utilizar esta información para aproximar la curva por su recta tangente en (t_0, x_0) , en una vecindad de la condición inicial.

En la figura 1 se observa que

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + h; \\ x_1 &= x_0 + F(t_0, x_0)(t_1 - t_0) = x_0 + F(t_0, x_0)h \end{aligned}$$

El proceso continua reemplazando el nuevo punto (t_1, x_1) en lugar de (t_0, x_0) .

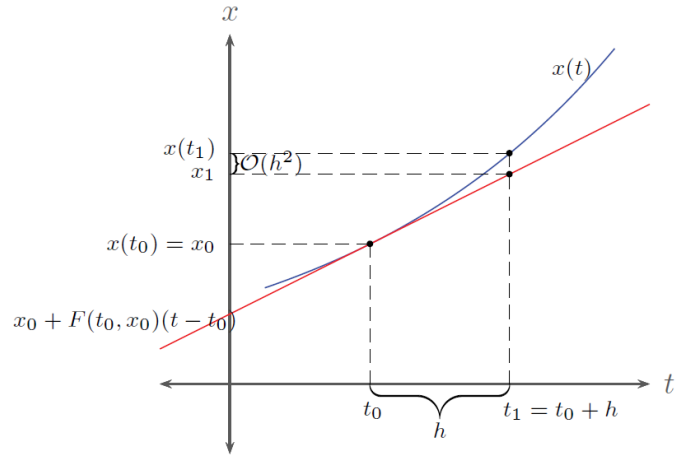


Fig. 1. Primer paso del método de Euler

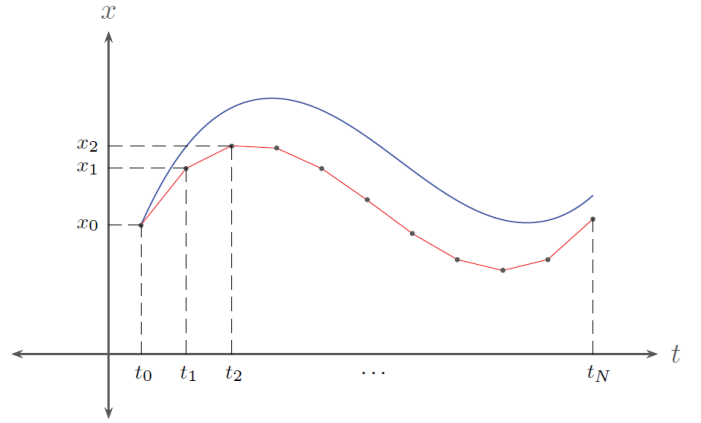


Fig. 2. Método de Euler: solución exacta y aproximado por la curva polinomial

De esta forma llegamos a la siguiente formulación del método de Euler, por recurrencia: dado un tamaño de paso $h > 0$, para cada $n = 1, \dots, N$, tomamos

$$\left. \begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + h; \\ x_n &= x_{n-1} + F(t_{n-1}, x_{n-1})h \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

El argumento que acabamos de presentar sugiere que la curva poligonal definida por los puntos (t_n, x_n) , $n = 0, 1, \dots, N$, está cerca de la curva solución que buscamos (ver Fig. 2) si h se elige cuidadosamente [6].

Ejemplo 1 Dada el siguiente problema de valor inicial

$$x' = t^2 - x \sin(t + x), \quad x(1) = 1$$

hallar el valor de $x(4)$, para $n = 6$

Usando el método de Euler, tenemos la siguiente tabla (confirmando también la representación grafica) [7].

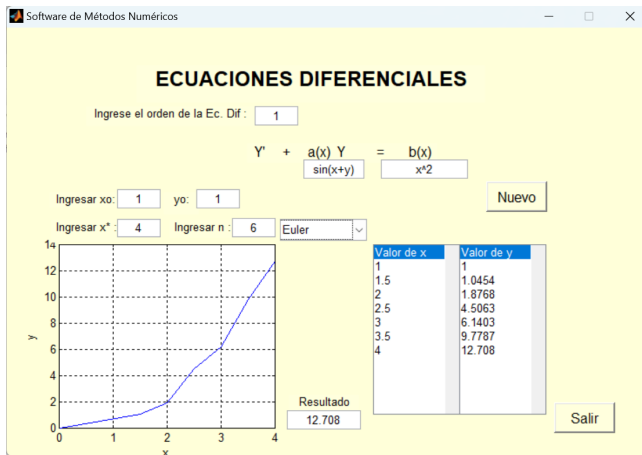


Fig. 3. Solución numérica del ejemplo 1

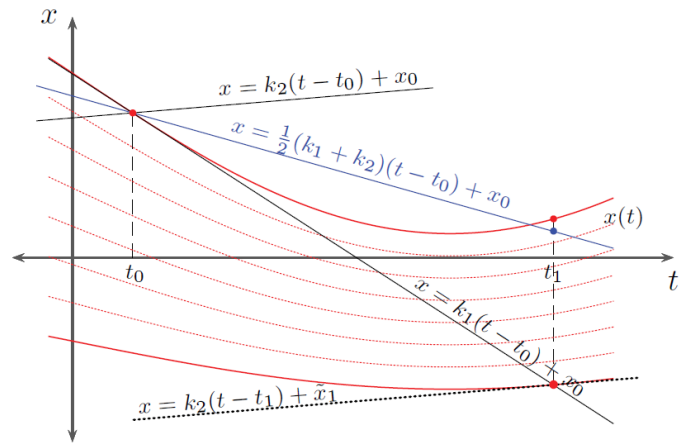


Fig. 4. interpretación geométrica del método de Heun

B. Métodos de Runge Kutta

Los métodos de Runge-Kutta, que se presentarán en breve, mantienen la estrategia de utilizar aproximaciones afines. Sin embargo, sustituimos la inclinación $x'(t_0)$, por el promedio de (estimaciones de) las derivadas de la solución en puntos $t \in [t_0, t_1]$ cuidadosamente seleccionados. El objetivo es obtener mejores aproximaciones que las dadas por el método de Euler, sin incurrir en costo computacionales. La elección de tales puntos y de sus pesos en el promedio no es única, y también depende del orden deseado de aproximación. Comenzaremos ilustrando este enfoque con un ejemplo sencillo. Más adelante discutiremos esta familia de métodos en general y daremos otros ejemplos representativos. Para simplificar nuestra presentación, inicialmente consideraremos sólo ecuaciones de primer orden en la dimensión $d = 1$. Sin embargo, es fácil extender estas ideas a cualquier orden y dimensión, como explicaremos en la siguiente subsección.

1) *Método de Heun (Método Predictor Corrector)*: La idea es aproximar la solución $x(t)$ por una función afín $x_0 + m(t - t_0)$ donde, en lugar de $m = x'(t_0)$, tomamos la inclinación m igual a la media de las derivadas de x en los puntos t_0 y $t_1 = t_0 + h$

$$m = \frac{1}{2}(x'(t_0) + x'(t_1)) = \frac{1}{2}(F(t_0, x(t_0)) + F(t_1, x(t_1))) \quad (3)$$

El problema con (3) es que el lado derecho depende de $x(t_1)$, ¡que es precisamente lo que queremos calcular! Sin embargo, es posible eludir esta dificultad de la siguiente manera (ver Figura 4).

Inicialmente, encontramos alguna aproximación $\tilde{x}_1$ para $x(t_1)$, no necesariamente una aproximación muy bueno. Esto se puede hacer, por ejemplo, utilizando el método de Euler. A continuación, usamos la idea que acabamos de esbozar, con $\tilde{x}_1$ en lugar de $x(t_1)$, para encontrar una mejor aproximación de $x(t_1)$. Formalmente hablando, estos dos pasos pueden ser

resumido en la siguiente forma:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= t_0 + h \\ k_1 &= F(t_0, x_0) \\ k_2 &= F(t_1, x_0 + k_1 h) \\ x_1 &= x_0 + (k_1 + k_2)h/2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

De esta forma llegamos a la siguiente formulas recursivas, que define este método de Runge Kutta, conocido como método de Heun:

$$\left. \begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + h \\ k_1 &= F(t_{n-1}, x_{n-1}) \\ k_2 &= F(t_n, x_{n-1} + k_1 h) \\ x_n &= x_{n-1} + (k_1 + k_2)h/2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Tal combinación, donde se utiliza un método numérico relativamente aproximado encontrar una primera aproximación, que luego se mejora mediante un método más preciso, se denomina método predictor-corrector [5]. Otros enfoques de este El tipo aparecerá más tarde.

Ejemplo 2 Dada el siguiente problema de valor inicial

$$x' = t^3 + \frac{2x}{t+x}, \quad x(1) = 1$$

hallar el valor de $x(3)$, para $n = 4$

Usando el método de Heun (Método Predictor Corrector), tenemos la siguiente tabla (confirmando también la representación grafica) [7]

2) *Familia Runge Kutta*: Los métodos de Runge-Kutta tienen la siguiente forma general:

$$\left. \begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + h \\ k_1 &= F(t_{n-1}, x_{n-1}) \\ k_2 &= F(t_{n-1} + c_2 h, x_{n-1} + a_{21} k_1 h) \\ k_3 &= F(t_{n-1} + c_3 h, x_{n-1} + (a_{31} k_1 + a_{32} k_2)h) \\ &\vdots \\ k_l &= F(t_{n-1} + c_l h, x_{n-1} + (a_{l1} k_1 + \dots + a_{ll-1} k_{l-1})h) \\ x_n &= x_{n-1} + (b_1 k_1 + \dots + b_l k_l)h \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

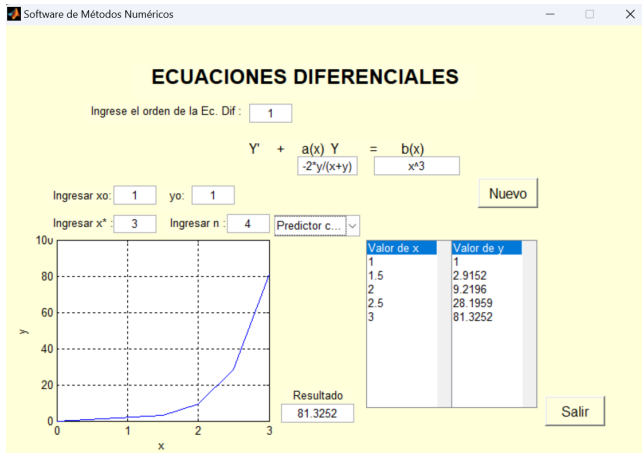


Fig. 5. Solución numérica del ejemplo 2

donde el número entero l se llama número de etapas y los números reales c_i con $i = 2, \dots, l$, b_j con $j = 1, \dots, l$ y a_{ij} con $1 \leq j \leq i \leq l$ se denominan coeficientes del método [8]. Es conveniente representar estos números como una matriz, que se denomina tabla de Butcher del método [5]:

0					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$		
c_l	a_{l1}	a_{l2}	$\dots$	$a_{l,l-1}$	
	b_1	b_2	$\dots$	b_{l-1}	b_l

Observe que el método de Euler se puede escribir de esta forma: simplemente trátelo como método de una sola etapa con tabla Butcher:

0	0
	1

3) *Métodos de Runge-Kutta de segundo orden:* La versión de segundo orden de la ecuación (6) es

$$t_n = t_{n-1} + h \quad (7)$$

$$k_1 = F(t_{n-1}, x_{n-1}) \quad (8)$$

$$k_2 = F(t_{n-1} + c_2 h, x_{n-1} + a_{21} k_1 h) \quad (9)$$

$$x_n = x_{n-1} + (b_1 k_1 + b_2 k_2) h \quad (10)$$

Para usar la ecuación (10) debemos determinar los valores de las constantes b_1 , b_2 , c_2 y a_{21} . Para ello, según [8] la serie de Taylor de segundo orden para x_n , en términos de x_{n-1} y $F(t_{n-1}, x_{n-1})$

$$x_n = x_{n-1} + F(t_{n-1}, x_{n-1})h + \frac{F'(t_{n-1}, x_{n-1})}{2!}h^2 \quad (11)$$

donde $F(t_{n-1}, x_{n-1})$ debe determinarse por derivación usando la regla de la cadena

$$F'(t_{n-1}, x_{n-1}) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (12)$$

Si sustituimos la ecuación (12) en la ecuación (11) se obtiene:

$$x_n = x_{n-1} + F(t_{n-1}, x_{n-1})h + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right) \frac{h^2}{2!} \quad (13)$$

La estrategia básica de los métodos de Runge-Kutta es el uso de manipulaciones algebraicas para obtener los valores de b_1 , b_2 , c_2 y a_{21} , que hacen equivalentes a las ecuaciones (10) y (13).

Para ello, primero usamos una serie de Taylor para expandir la ecuación (19). La serie de Taylor para una función de dos variables se define como

$$g(t + r, x + s) = g(t, x) + r \frac{\partial g}{\partial t} + s \frac{\partial g}{\partial x} + \dots$$

Si se aplica este método para expandir la ecuación (19) se llega a:

$$F(t_{n-1} + c_2 h, x_{n-1} + a_{21} k_1 h) = F(t_{n-1}, x_{n-1}) + c_2 h \frac{\partial F}{\partial t} + a_{21} k_1 h \frac{\partial F}{\partial x} + O(h^2) \quad (14)$$

sustituyendo la ecuación (14) junto con la ecuación (8) en la ecuación (10) para obtener

$$x_n = x_{n-1} + b_1 h F(t_{n-1}, x_{n-1}) + b_2 h F(t_{n-1}, x_{n-1}) + b_2 c_2 h^2 \frac{\partial F}{\partial t} + b_2 a_{21} h^2 F(t_{n-1}, x_{n-1}) \frac{\partial F}{\partial x} + O(h^3) \quad (15)$$

agrupando términos

$$x_n = x_{n-1} + [b_1 F(t_{n-1}, x_{n-1}) + b_2 F(t_{n-1}, x_{n-1})]h + \left[b_2 c_2 \frac{\partial F}{\partial t} + b_2 a_{21} F(t_{n-1}, x_{n-1}) \frac{\partial F}{\partial x} \right] h^2 + O(h^3) \quad (16)$$

Ahora, si comparamos términos comunes en las ecuaciones (13) y (16), determinamos que para que las dos ecuaciones sean equivalentes, se debe satisfacer lo siguiente:

$$b_1 + b_2 = 1 \quad (17)$$

$$b_2 c_2 = \frac{1}{2} \quad (18)$$

$$b_2 a_{21} = \frac{1}{2} \quad (19)$$

Como tenemos tres ecuaciones con cuatro incógnitas, debemos dar el valor de una de estas incógnitas para determinar las otras tres. Suponga que damos un valor para a_2 . Entonces se resuelven de manera simultánea las ecuaciones (17) a (19) obteniendo:

$$b_1 = 1 - b_2 \quad (20)$$

$$c_2 = a_{21} = \frac{1}{2b_2} \quad (21)$$

Debido a que podemos elegir un número infinito de valores para b_2 , hay un número infinito de métodos RK de segundo orden. A continuación presentamos tres de las versiones más comúnmente usadas y preferidas:

Método de Heun ($b_2 = 1/2$): Si suponemos que b_2 es $1/2$ de las ecuaciones (20) y (21) puede obtenerse $b_1 = 1/2$ y $c_2 = a_{21} = 1$. Estos parámetros, al sustituirse en la ecuación (10), dan:

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + h \\ k_1 &= F(t_{n-1}, x_{n-1}) \\ k_2 &= F(t_{n-1} + h, x_{n-1} + k_1 h) \\ x_n &= x_{n-1} + \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2 \right) h \end{aligned}$$

es su tabla de Butcher.

0	
1/2	1
1	1/2 1/2

Método del punto medio ($b_2 = 1$): Si suponemos que b_2 es 1 de las ecuaciones (20) y (21) puede obtenerse $b_1 = 0$ y $c_2 = a_{21} = 1/2$. Estos parámetros, al sustituirse en la ecuación (10), dan:

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + h \\ k_1 &= F(t_{n-1}, x_{n-1}) \\ k_2 &= F(t_{n-1} + \frac{1}{2}h, x_{n-1} + \frac{1}{2}k_1 h) \\ x_n &= x_{n-1} + k_2 h \end{aligned}$$

es su tabla de Butcher.

0	
1/2	1/2
1	0 1

Método de Ralston ($b_2 = 2/3$): Si suponemos que b_2 es $2/3$ de las ecuaciones (20) y (21) puede obtenerse $b_1 = 1/3$ y $c_2 = a_{21} = 3/4$. Estos parámetros, al sustituirse en la ecuación (10), dan:

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + h \\ k_1 &= F(t_{n-1}, x_{n-1}) \\ k_2 &= F(t_{n-1} + \frac{3}{4}h, x_{n-1} + \frac{3}{4}k_1 h) \\ x_n &= x_{n-1} + \left(\frac{1}{3} k_1 + \frac{2}{3} k_2 \right) h \end{aligned}$$

es su tabla de Butcher.

0	
3/4	3/4
1	1/3 2/3

Los dos métodos de Runge-Kutta más populares se presentan en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3 (Método de Runge-Kutta de orden 3) considere el método numérico definido por

$$\left. \begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + h \\ k_1 &= F(t_{n-1}, x_{n-1}) \\ k_2 &= F(t_{n-1} + h/2, x_{n-1} + k_1 h/2) \\ k_3 &= F(t_n, x_{n-1} + (-k_1 + 2k_2)h) \\ x_n &= x_{n-1} + (k_1 + 4k_2 + k_3)h/6 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Tenga en cuenta que hay tres etapas y el cuadro de Butcher es el siguiente:

0			
1/2	1/2		
1	-1	2	
	1/6	4/6	1/6

Dada la ecuación diferencial

$$x' = \cos t - x e^{-x-y}, \quad x(0) = 2$$

hallar el valor de $x(5)$, para $n = 10$

Usando el método de Runge Kutta de orden 3, tenemos la siguiente tabla (confirmando también la representación grafica) [7]

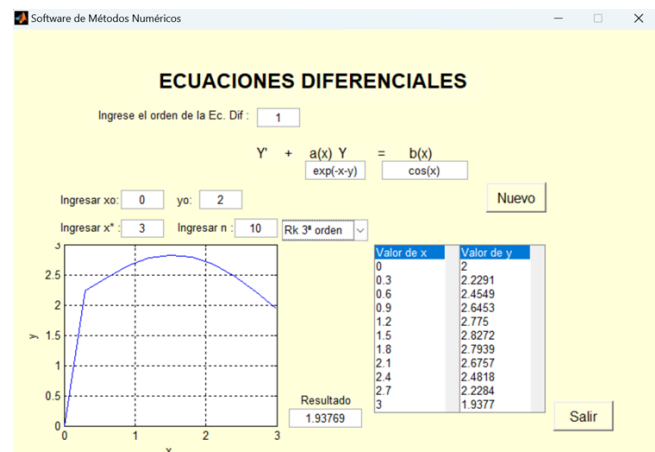


Fig. 6. Solución numérica del ejemplo 3

Ejemplo 4 (Método clásico de Runge-Kutta de orden 4) considere el método numérico definido por

$$\left. \begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + h \\ k_1 &= F(t_{n-1}, x_{n-1}) \\ k_2 &= F(t_{n-1} + h/2, x_{n-1} + k_1 h/2) \\ k_3 &= F(t_{n-1} + h/2, x_{n-1} + k_2 h/2) \\ k_4 &= F(t_n, x_{n-1} + k_3 h) \\ x_n &= x_{n-1} + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h/6 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Tenga en cuenta que hay cuatro etapas y el cuadro de Butcher es el siguiente:

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	2/6	2/6	1/6

Dada la ecuación diferencial

$$x' = t e^t - x e^{-x}, \quad x(0) = 1$$

hallar el valor de $x(2)$, para $n = 10$

Usando el método de Runge Kutta de orden 4, tenemos la siguiente tabla (confirmando también la representación grafica) [7].

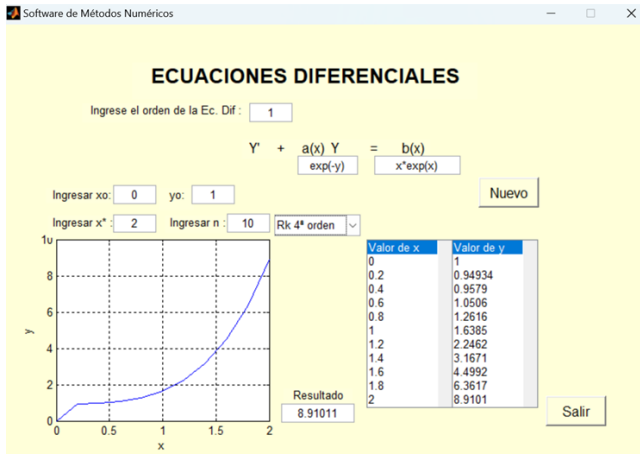


Fig. 7. Solución numérica del ejemplo 4

4) *Dimensiones superiores*: Los métodos de Runge-Kutta se pueden extender fácilmente a ecuaciones diferenciales de orden 1 en cualquier dimensión $d \geq 1$. De esta manera, utilizando el argumento de reducción de orden, también se pueden aplicar a ecuaciones diferenciales de cualquier orden en cualquier dimensión.

Consideremos el problema de valores iniciales (1) con $x = (x^1, \dots, x^d)$ y $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^d)$ tomando valores en $\mathbb{R}^d$. El método de Euler puede ser inmediatamente extendido a este contexto: considerar

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + h \\ x_n^i &= x_{n-1}^i + F^i(t_{n-1}, x_{n-1})h, \quad i = 1, \dots, d \end{aligned} \quad (24)$$

donde $F^1, \dots, F^d$ representa las coordenadas de la función F . Para $d = 1$ coincide con la ecuación (2).

Similarmente la versión en dimensión d del método de Runge Kutta (6) es

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + h \\ k_1^i &= F^i(t_{n-1}, x_{n-1}) \\ k_2^i &= F^i(t_{n-1} + c_2h, x_{n-1} + a_{21}k_1h) \\ k_3^i &= F^i(t_{n-1} + c_3h, x_{n-1} + (a_{31}k_1 + a_{32}k_2)h) \\ &\vdots \\ k_l^i &= F^i(t_{n-1} + c_lh, x_{n-1} + (a_{l1}k_1 + \dots + a_{l,l-1}k_{l-1})h) \\ x_n^i &= x_{n-1}^i + (b_1k_1 + \dots + b_lk_l)h \end{aligned} \quad (25)$$

para $i = 1, \dots, d$ donde $k_j = (k_j^1, \dots, k_j^d)$ para $j = 1, \dots, l$. Por ejemplo el método clásico de Runge Kutta de orden 4 (Ejemplo 4) para el siguiente sistema de dos ecuaciones de orden 1 y dimensión 1

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \end{cases} \quad (26)$$

está dado por

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + h \\ k_1^1 &= f(t_{n-1}, x_{n-1}, y_{n-1}) \\ k_1^2 &= g(t_{n-1}, x_{n-1}, y_{n-1}) \\ k_2^1 &= f(t_{n-1} + h/2, x_{n-1} + k_1^1h/2, y_{n-1} + k_1^2h/2) \\ k_2^2 &= g(t_{n-1} + h/2, x_{n-1} + k_1^1h/2, y_{n-1} + k_1^2h/2) \\ k_3^1 &= f(t_{n-1} + h/2, x_{n-1} + k_2^1h/2, y_{n-1} + k_2^2h/2) \\ k_3^2 &= g(t_{n-1} + h/2, x_{n-1} + k_2^1h/2, y_{n-1} + k_2^2h/2) \\ k_4^1 &= f(t_{n-1} + h, x_{n-1} + hk_3^1, y_{n-1} + hk_3^2) \\ k_4^2 &= g(t_{n-1} + h, x_{n-1} + hk_3^1, y_{n-1} + hk_3^2) \\ x_n &= x_{n-1} + (k_1^1 + 2k_2^1 + 2k_3^1 + k_4^1)h/6 \end{aligned} \quad (27)$$

Ejemplo 5 (Ecuación diferencial de segundo orden) Dada la ecuación diferencial

$$x'' + x' \sin t + t^2 x = \frac{3}{x} \quad x(2) = 1, \quad x'(2) = -2$$

hallar el valor de $x(4)$, para $n = 4$

Usando el método de Runge Kutta de orden 4, tenemos la siguiente tabla (confirmando también la representación grafica)

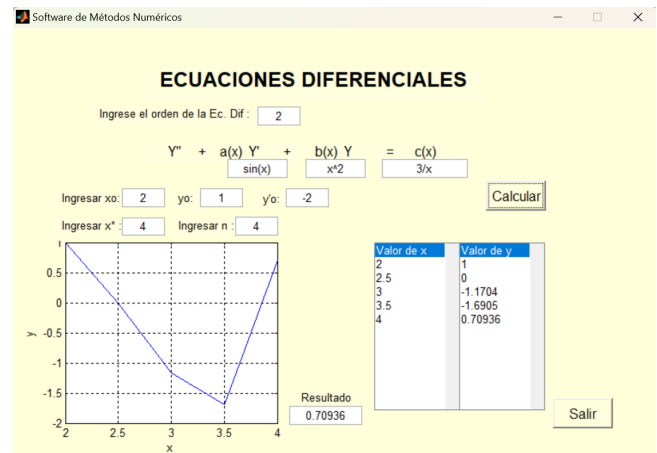


Fig. 8. Solución numérica del ejemplo 5

III. PLANTEAMIENTO DEL MODELO

El modelo matemático del péndulo oscilante describe el movimiento de una masa puntual suspendida de un hilo inextensible y sin masa, bajo la acción de la gravedad (Fig 9).

A. Descripción del sistema físico

Se considera un péndulo simple compuesto por:

- Una masa puntual m
- Un hilo inextensible y sin masa de longitud l
- Movimiento en un plano vertical
- Campo gravitatorio uniforme g
- Ausencia de fricción (modelo ideal)

La coordenada generalizada elegida es el ángulo $x(t)$ medido desde la vertical [9].

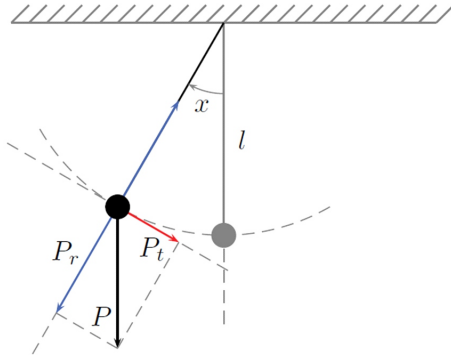


Fig. 9. péndulo oscilante

B. Planteamiento mediante la Segunda Ley de Newton

La fuerza tangencial sobre la masa viene dada por la componente del peso:

$$P_t = -mg \sin x$$

La aceleración tangencial es:

$$a_t = l \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Aplicando la Segunda Ley de Newton:

$$ml \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \sin x$$

simplificando

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin x = 0 \quad (28)$$

La ecuación (28) se denomina la ecuación diferencial no lineal del péndulo simple [10]. Aunque aparentemente simple, corresponde a una ecuación diferencial no lineal de segundo orden. En términos generales, este tipo de ecuaciones es difícil e incluso imposible de resolver mediante métodos analíticos exactos. Para continuar con el análisis, existen dos alternativas principales: (i) transformar o simplificar la ecuación a una forma susceptible de solución analítica, o (ii) recurrir a métodos numéricos que permitan obtener una solución aproximada de manera directa.

C. Procedimiento

1) *Primera Opción:* recordemos que la expansión en series de potencias para $\sin x$ está dada por

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (29)$$

Para desplazamientos angulares pequeños, $\sin x$ es aproximadamente igual a x cuando se expresa en radianes [11]. Por lo tanto, para desplazamientos pequeños, la ecuación (28) se convierte en

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{l} x = 0 \quad (30)$$

la cual es una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Esta aproximación es muy importante, ya que la ecuación (30)

es fácil de resolver analíticamente. La solución, basada en la teoría de las ecuaciones diferenciales, está dada por

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t \quad (31)$$

donde $x_0 = x(0)$ el desplazamiento inicial y donde se supone que la velocidad ($v = dx/dt$) es cero en $t = 0$. Al tiempo requerido por el péndulo para un ciclo completo de oscilación se le llama periodo, y está dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (32)$$

2) *Segunda Opción:* Los cálculos anteriores son, esencialmente, una solución completa del movimiento del péndulo. Sin embargo, usted debe considerar también la exactitud de los resultados debido a las suposiciones inherentes en la ecuación (30). Para evaluar la exactitud, es necesario obtener una solución numérica de la ecuación (28), que es una representación física más completa del movimiento. Se puede usar por ejemplo el método RK de cuarto orden. La ecuación (28) se debe transformar en un sistema de dos ecuaciones de primer orden. La velocidad v está definida por

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (33)$$

luego la ecuación (28) se expresa como

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{l} \sin x \quad (34)$$

Las ecuaciones (33) y (34) constituyen un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

IV. RESULTADOS

Un programa de cómputo para implementar el método de Runge-Kutta de cuarto orden aplicado a sistemas de ecuaciones diferenciales puede desarrollarse, por ejemplo, en el software MATLAB. Este entorno resulta particularmente adecuado para la simulación y comparación de distintos modelos matemáticos que describen un mismo sistema físico. Por ejemplo, el modelo lineal de un péndulo oscilante obtenida a partir de la ecuación (30) con $g = 32.2 \text{ pies}/s^2$ y $l = 2 \text{ pies}$ se puede expresarse de la siguiente manera

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1 \quad \frac{dv_1}{dt} = -16.1 x_1$$

donde x_1 y v_1 es el desplazamiento angular y velocidad respectivamente. Un modelo no lineal del mismo sistema obtenida a partir de la ecuación (28) es

$$\frac{dx_2}{dt} = v_2 \quad \frac{dv_2}{dt} = -16.1 \sin(x_2)$$

donde x_2 y v_2 es el desplazamiento angular y velocidad en el caso no lineal. Se desarrolla el algoritmo en MATLAB para implementar el método de Runge Kutta de cuarto orden la cual resuelve las ecuaciones (28) y (30) que caracteriza el modelo de péndulo oscilante [12]

% modelo no lineal: dx/dt=y, dy/dt=-16.1*sin(x)

```

% modelo lineal: dx/dt = y, dy/dt = -16.1x
% Definir el sistema
f = @(t, y) [y(2); -16.1*sin(y(1))];
g = @(t, z) [z(2); -16.1*z(1)];
% Condiciones iniciales y paso
t0 = 0;
tf = 4;
h = 0.1;
y0 = [pi/20; 0]; % y(1)=x, y(2)=dx/dt
z0 = [pi/20; 0];
% Tiempo
t = t0:h:tf;
n = length(t);
y = zeros(2, n);
z = zeros(2, n);
y(:,1) = y0;
z(:,1) = z0;
% Algoritmo Runge-Kutta 4to Orden para no li
for i = 1:n-1
k1 = h * f(t(i), y(:,i));
k2 = h * f(t(i) + h/2, y(:,i) + k1/2);
k3 = h * f(t(i) + h/2, y(:,i) + k2/2);
k4 = h * f(t(i) + h, y(:,i) + k3);
y(:,i+1) = y(:,i) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) / 6;
end
% Algoritmo Runge-Kutta 4to Orden para lineal
for i = 1:n-1
m1 = h * g(t(i), z(:,i));
m2 = h * g(t(i) + h/2, z(:,i) + m1/2);
m3 = h * g(t(i) + h/2, z(:,i) + m2/2);
m4 = h * g(t(i) + h, z(:,i) + m3);
z(:,i+1) = z(:,i) + (m1 + 2*m2 + 2*m3 + m4) / 6;
end
% Graficar resultados
plot(t, y(1,:), t, y(2,:), t, z(1,:), t, z(2,:));
legend('x1', 'v1', 'x2', 'v2');
xlabel('t');
ylabel('x, v');

```

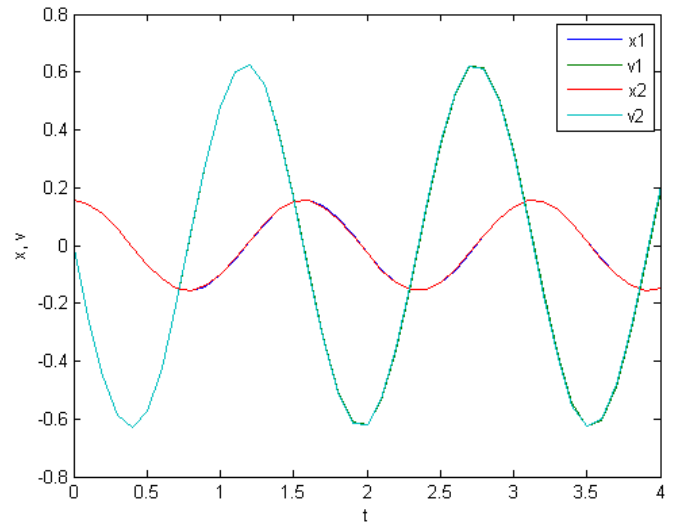


Fig. 10. Soluciones para péndulos tanto lineales como no lineales con desplazamientos iniciales pequeñas

COMPARACIÓN DE LA SOLUCIÓN DEL MODELO NO LINEAL, CON LA SOLUCIÓN DEL MODELO LINEAL CON DESPLAZAMIENTO INICIAL PEQUEÑA

Tiempo	Solución del modelo no lineal	Solución del modelo lineal
0	0,157079	0,157079
0,2	0,109169	0,109169
0,4	-0,005318	-0,005318
0,6	-0,116549	-0,116549
0,8	-0,156683	-0,156683
1	-0,101251	-0,101251
1,2	0,015927	0,015927
1,4	0,123379	0,123379
1,6	0,155569	0,155569
1,8	0,092873	0,092873
2	-0,026458	-0,026458
2,2	-0,129640	-0,129640
2,4	-0,153742	-0,153742
2,6	-0,084074	-0,084074
2,8	0,036863	0,036863
3	0,135304	0,135304
3,2	0,151211	0,151211
3,4	0,074892	0,074892
3,6	-0,047094	-0,047094
3,8	-0,140345	-0,140345
4	-0,147987	-0,147987

Elaboración de los autores a partir de los datos de investigación

A. un pequeño desplazamiento inicial

consideremos $x_1(t) = x_2(t) = \pi/20$ y $v_1(t) = v_2(t) = 0$

Los resultados calculados para los modelos lineal y no lineal son casi idénticos Fig 10. Esto era lo que se esperaba, ya que cuando el desplazamiento inicial es pequeño, $\sin x \approx x$.

B. un gran desplazamiento inicial

consideremos $x_1(t) = x_2(t) = \pi/3$ y $v_1(t) = v_2(t) = 0$

Cuando el desplazamiento inicial es $\pi/3$, las soluciones son diferentes. Esta diferencia se magnifica conforme el tiempo va aumentando Fig 11. Esto se esperaba, ya que la suposición de que $\sin x \approx x$ no es cierta cuando x es grande.

V. DISCUSIÓN

El péndulo oscilante constituye un modelo clásico para el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y sistemas dinámicos conservativos. Desde el punto de vista

cualitativo, la ecuación (28) define un sistema autónomo cuyo comportamiento en el espacio de fases depende fuertemente de la amplitud inicial. Como establecen [13], los sistemas no lineales pueden presentar estructuras dinámicas que no admiten una descripción completa mediante técnicas lineales, particularmente cuando se alejan del entorno de equilibrio.

La aproximación de pequeño ángulo, que sustituye $\sin x$ por x , transforma el modelo en un oscilador armónico simple. De acuerdo con [2], esta linealización es válida únicamente cuando $|x| \ll 1$. Los resultados numéricos obtenidos eviden-

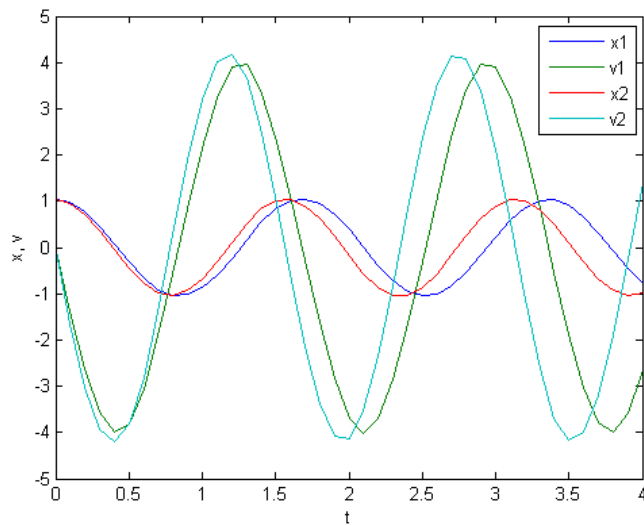


Fig. 11. Soluciones para péndulos tanto lineales como no lineales con desplazamientos iniciales grande

TABLA II

COMPARACIÓN DE LA SOLUCIÓN DEL MODELO NO LINEAL, CON LA SOLUCIÓN DEL MODELO LINEAL CON DESPLAZAMIENTO INICIAL GRANDE

Tiempo	Solución del modelo no lineal	Solución del modelo lineal
0	1,047197	1,047197
0,2	0,776451	0,727793
0,4	0,080894	-0,035456
0,6	-0,661718	-0,776995
0,8	-1,035669	-1,044558
1	-0,872565	-0,675012
1,2	-0,240410	0,106183
1,4	0,531018	0,822528
1,6	1,001645	1,037130
1,8	0,948583	0,619159
2	0,393586	-0,176390
2,2	-0,387226	-0,864269
2,4	-0,945638	-1,024950
2,6	-1,003317	-0,560493
2,8	-0,536646	0,245757
3	0,233729	0,902028
3,2	0,868519	1,008075
3,4	1,036001	0,499283
3,6	0,666280	-0,313965
3,8	-0,074343	-0,935633
4	-0,771575	-0,986585

Elaboración de los autores a partir de los datos de investigación

cion que, al incrementarse la amplitud inicial, el período de oscilación del sistema no lineal aumenta respecto al modelo lineal, confirmando la dependencia del período con la amplitud. Esta desviación refleja el carácter intrínsecamente no lineal del sistema y demuestra la limitación del modelo lineal como aproximación global.

Desde el punto de vista computacional, la integración numérica permitió analizar el comportamiento dinámico sin recurrir a funciones elípticas. Según [3], los métodos de Runge-Kutta de orden cuatro presentan mejor precisión global y menor acumulación del error de truncamiento en comparación

con métodos explícitos de primer orden.

VI. CONCLUSIONES

los resultados permiten concluir que la linealización es adecuada únicamente como aproximación local alrededor del equilibrio estable tal como se puede observar en la Fig 10. Para amplitudes moderadas o grandes, el empleo de métodos numéricos de orden superior resulta indispensable para preservar la estabilidad y precisión del modelo como se evidencio en la Fig 11. Estas consideraciones le permiten suponer con seguridad que la diferencia entre la segunda columna y tercera columna de la tabla II representa verdaderamente la diferencia entre el modelo lineal y el no lineal.

La simulación computacional se consolida así como una herramienta esencial en el estudio aplicado de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, permitiendo explorar comportamientos que no admiten soluciones analíticas elementales.

AGRADECIMIENTOS

Estamos muy agradecidos con los colegas del departamento académico de Ciencias Físico Matemáticas, por su apoyo y colaboración a la presente investigación llevada a cabo en la Universidad Nacional del Altiplano-Puno. Agradecemos también por el financiamiento al proyecto de investigación del docentes investigadores Renacyt 2026 de la Universidad Nacional del Altiplano

REFERENCIAS

- [1] I. Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. London, U.K.: Royal Society, 1687.
- [2] W. E. Boyce y R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 10th ed. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2017.
- [3] J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, 3rd ed. Chichester, U.K.: John Wiley & Sons, 2016.
- [4] M. W. Hirsch, S. Smale y R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 3rd ed. Amsterdam, Netherlands: Academic Press, 2013.
- [5] M. Viana y J. Espinar, *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach to Theory and Practice*, Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 2021.
- [6] R. Burden, J. Douglas y A. Burden, *Análisis numérico*. México: Cengage Learning Editores, 2017.
- [7] H. Morales, *MATLAB 7 para ciencias e ingeniería con métodos numéricos y visualización gráfica*. Lima, Perú: Megabyte, 2010.
- [8] S. Chapra y R. Canale, *Métodos numéricos para ingenieros*. México: McGRAW-HILL/Interamericana Editores, 2007.
- [9] J. B. Marion and S. T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 5th ed. Belmont, CA, USA: Brooks Cole, 2004.
- [10] J. R. Taylor, *Classical Mechanics*. Sausalito, CA, USA: University Science Books, 2005.
- [11] J. Stewart, *Calculus*, 8th ed. Boston, MA, USA: Cengage Learning, 2016.
- [12] J. Mathews y K. Fink, *Numerical Methods Using MATLAB*. United States of America: Pearson Education, 2004.
- [13] M. W. Hirsch, S. Smale y R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 3rd ed. Amsterdam, Netherlands: Elsevier Academic Press, 2013.