

The Influence of SageMath Software on Solving Problems in Differential Manifolds among University Students of Physical and Mathematical Sciences

1^{ro} Richar Marlon Mollinedo Chura

Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas

Universidad Nacional del Altiplano

Puno, Perú

rmollinedo@unap.edu.pe

2^{do} Eliseo Pumacallahui Salcedo

Departamento Académico de Ciencias Básicas

Universidad Nacional Intercultural de Quillabamba

Quillabamba, Perú

eliseo.pumacallahui@uniqu.edu.pe

3^{ro} Roger Ccama Alejo

Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas

Universidad Nacional del Altiplano

Puno, Perú

rccama@unap.edu.pe

4^{to} Fredy Gonzalo Copari Romero

Departamento Académico de Ciencias Básicas

Universidad Nacional de Juliaca

Juliaca, Perú

fcopari@unaj.edu.pe

5^{to} Isaac Ortega Limachi

Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas

Universidad Nacional del Altiplano

Puno, Perú

iortega@unap.edu.pe

6^{to} María Eugenia Mancilla Quispe

Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas

Universidad Nacional del Altiplano

Puno, Perú

41646596@unap.edu.pe

7^{mo} Luz Marina Acero Coaquira

Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas

Universidad Nacional del Altiplano

Puno, Perú

laceroc@unap.edu.pe

Abstract—This study examines the influence of SageMath software on solving problems involving differential manifolds among university students of Physical and Mathematical Sciences. A pre-experimental research design was employed. The sample consisted of 33 students of both sexes, selected through probabilistic sampling. A pre-test and a post-test were administered to collect data and measure problem-solving performance in differential manifolds. The data were analyzed at both descriptive and inferential levels. The results indicate that SageMath software has a statistically significant influence on students' problem-solving performance, with a 95% confidence level. This finding is supported by a significant increase in performance ($t(33) = 23.204$, $p < 0.05$) between the pre-test scores ($\mu_1 = 8.6041$) and the post-test scores ($\mu_2 = 13.9791$).

Furthermore, the results show that SageMath software significantly influences the planning, execution, and verification stages of problem-solving in differential manifolds.

Keywords— Differential manifold problem solving, SageMath, mathematics education

Influencia del software SageMath en la resolución de problemas de variedades diferenciales en los estudiantes Universitarios de Ciencias Físico Matemáticas

1^{ro} Richar Marlon Mollinedo Chura
Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
rmollinedo@unap.edu.pe

2^{do} Eliseo Pumacallahui Salcedo
Departamento Académico de Ciencias Básicas
Universidad Nacional Intercultural de Quillabamba
Quillabamba, Perú
eliseo.pumacallahui@uniqu.edu.pe

3^{ro} Roger Ccama Alejo
Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
rccama@unap.edu.pe

4^{to} Fredy Gonzalo Copari Romero
Departamento Académico de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Juliaca
Juliaca, Perú
fcopari@unaj.edu.pe

5^{to} Isaac Ortega Limachi
Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
iortega@unap.edu.pe

6^{to} María Eugenia Mancilla Quispe
Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
41646596@unap.edu.pe

7^{mo} Luz Marina Acero Coaquira
Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
laceroc@unap.edu.pe

Resumen—La presente investigación está orientada a estudiar la Influencia del software SageMath en la resolución de problemas de variedades diferenciales en los estudiantes Universitarios de Ciencias Físico Matemáticas. El diseño es pre experimental. La muestra estuvo conformada por 33 estudiantes de ambos sexos, seleccionados mediante un muestreo probabilístico, a quienes se le aplicó la pre test y post test, que permitió recoger la información y medir la variable resolución de problemas de variedades diferenciales. Los resultados fueron analizados en el nivel descriptivo e inferencial. Los resultados indican que el software SageMath influye significativamente en la resolución de problemas de variedades diferenciales en los estudiantes Universitarios de Ciencias Físico Matemáticas, a un nivel del 95% de seguridad estadística; prueba de ello es que hubo un incremento significativo en el nivel de resolución de problemas ($t(33) = 23.204$, $p < 0.05$) entre los puntajes de pre test ($\mu_1 = 8.6041$) y post test ($\mu_2 = 13.9791$).

Asimismo, el software SageMath influye significativamente en las etapas de planificación, ejecución y comprobación en la resolución de problemas de variedades diferenciales en los estudiantes Universitarios de Ciencias Físico Matemáticas

Palabras Clave— resolución de problemas de variedad diferen-

cial, SageMath, educación matemática

I. INTRODUCCIÓN

Las investigaciones recientes muestran que la integración de las tecnologías de la información y comunicación (TIC) en la enseñanza universitaria favorece la motivación y el aprendizaje activo mediante recursos interactivos y personalizables, lo que mejora la participación y la adaptación a ritmos individuales [1]. Además, revisiones sistemáticas y estudios empíricos indican que las TIC facilitan metodologías híbridas y colaborativas, potenciando el trabajo en grupo, la simulación y el aprendizaje basado en proyectos, siempre que exista soporte pedagógico adecuado [2]. Sin embargo, la eficacia depende fuertemente de la infraestructura tecnológica y la autoeficacia digital tanto de docentes como de estudiantes: la falta de conectividad y competencias digitales sigue siendo un freno importante en varios contextos latinoamericanos [4]. Por otro lado, estudios realizados tras la pandemia señalan que la implementación exitosa requiere formación docente orientada

a diseño instruccional con TIC y políticas institucionales que garanticen equidad de acceso y evaluación formativa mediada por tecnología [3].

El software SageMath ha evolucionado desde un sistema monolítico hacia un ecosistema más modular de bibliotecas Python, lo que facilita su integración en flujos de trabajo modernos y la reutilización de componentes en proyectos de investigación y enseñanza [5]. Además, se ha documentado y estudiado su uso efectivo en la enseñanza por ejemplo, integrándolo con plataformas LMS como Canvas y con cuadernos Jupyter para actividades interactivas en asignaturas de álgebra lineal y cálculo, lo que demuestra su valor pedagógico para la automatización de cálculos y la visualización [6]. Paralelamente, la comunidad continúa desarrollando paquetes especializados por ejemplo QuiverTools y PySymmetry disponibles para SageMath (y a menudo también en Julia), que extienden sus capacidades en áreas como la teoría de quivers y simetrías, mostrando su papel activo en investigación matemática contemporánea [7]. Finalmente, trabajos recientes han usado SageMath como herramienta comprobada en aplicaciones científicas y de modelado numérico, subrayando su utilidad tanto para prototipado rápido como para cómputo reproducible en publicaciones científicas [8].

II. MATERIALES

Es necesario recordar algunos ejemplos, conceptos y resultados básicos relacionados a variedades diferenciables que no son nada más que espacios topológicos localmente homeomorfos a un espacio euclidiano. Para nosotros diferenciable es siempre sería de clase C^∞ . Luego realizaremos una breve descripción sobre el software SageMath. Finalmente realizar ejemplos de variedades diferenciales usando el software SageMath.

A. Sobre Variedades Diferenciales

Definición 1 Sea M un espacio topológico, un sistema de coordenadas locales en M es un par (U, φ) , donde $U \subset M$ es un conjunto abierto y $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo de U sobre el subconjunto abierto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ [12]

Se dice que m es la *dimensión* de $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ si para cada $p \in U$ se tiene $\varphi(p) = (\varphi_1(p), \dots, \varphi_m(p))$. Los números $\varphi_i = \varphi_i(p)$, $i = 1, \dots, m$ son llamados coordenadas del punto $p \in M$ en el sistema φ . El sistema de coordenadas locales en M se llama también carta local en M .

Definición 2 Un atlas $\mathcal{A}$ de clase C^r y dimensión m sobre un espacio topológico M es una colección $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) / i \in I\}$, donde I es un conjunto de índices, de sistemas de coordenadas locales de dimensión m en M , tal que

1.- $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ (los dominios U_i de los φ_i forman un cubrimiento abierto de M)

2.- los sistemas de coordenadas locales en M son compatibles

dos a dos; es decir,

si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces el cambio de coordenadas

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

es un difeomorfismo de clase C^r . [11], [12]

Si $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, entonces U se llama vecindad coordenada de $\mathcal{A}$

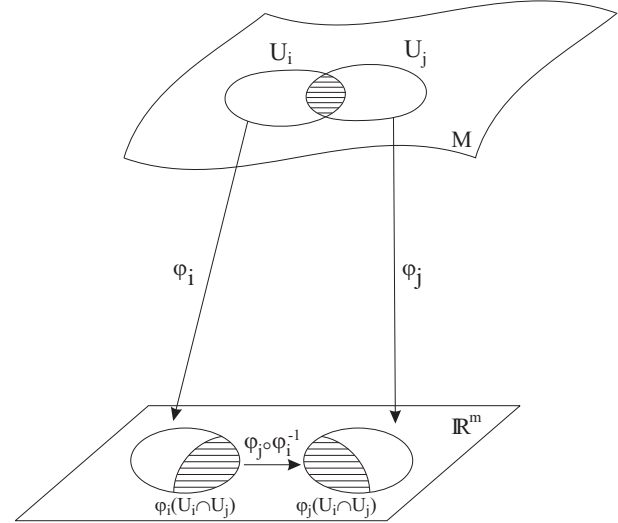


Fig. 1. Cambio de coordenadas

Ejemplo 1 Sea $\mathbb{S}^1 = \{(\cos \theta, \sin \theta) : \theta \in \mathbb{R}\}$, la esfera 1-dimensional en $\mathbb{R}^2$, en este caso particular se denomina simplemente círculo unitario [10].

Si $U = \mathbb{S}^1 - \{(1, 0)\}$ y $V = \mathbb{S}^1 - \{(-1, 0)\}$, es claro que U y V son abiertos en $\mathbb{S}^1$

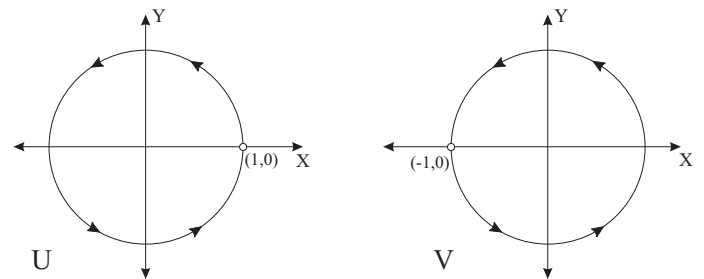


Fig. 2. Círculo unitario

Sean las aplicaciones $\varphi : U \rightarrow \langle 0, 2\pi \rangle$ y $\psi : V \rightarrow \langle -\pi, \pi \rangle$ dadas por

$\varphi(\cos \theta, \sin \theta) = \theta$ y $\psi(\cos \theta, \sin \theta) = \theta$ como en la figura 2, entonces se tiene

$\mathbb{S}^1 = U \cup V$, $U \cap V = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : y < 0\}$

$\varphi(U \cap V) = \langle 0, \pi \rangle \cup \langle \pi, 2\pi \rangle$, $\psi(U \cap V) = \langle -\pi, 0 \rangle \cup \langle 0, \pi \rangle$

$$\varphi \circ \psi^{-1}(\theta) = \begin{cases} \theta & \text{si } 0 < \theta < \pi \\ \theta + 2\pi & \text{si } -\pi < \theta < 0 \end{cases}$$

$$\psi \circ \varphi^{-1}(\theta) = \begin{cases} \theta & \text{si } 0 < \theta < \pi \\ \theta - 2\pi & \text{si } \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

Luego, $\varphi \circ \psi^{-1}$ es un difeomorfismo C^∞ y $\mathcal{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ es un atlas 1-dimensional C^∞ sobre $\mathbb{S}^1$

Definición 3 Un sistema de coordenadas locales $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ en un espacio topológico M se dice que es admisible respecto a un atlas $\mathcal{A}$ de clase C^r sobre M si para todo sistema de coordenadas locales $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de M que pertenece a $\mathcal{A}$, con $U \cap W \neq \emptyset$, los cambios de coordenadas $\varphi \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \varphi^{-1}$ son de clase C^r , ($r \geq 1$) [13]

Definición 4 Un atlas $\mathcal{A}$ de dimensión m y de clase C^r sobre un espacio topológico M se llama maximal, si contiene a todos los sistemas de coordenadas locales que son admisibles con respecto a $\mathcal{A}$ [14]

Ejemplo 2 Sea $\mathcal{A}$ un atlas de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ que consiste del único sistema de coordenadas locales $\varphi = id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ el sistema de coordenadas locales dado por $\psi(t) = t^3$, entonces ψ no es admisible con respecto al atlas $\mathcal{A}$, porque $\psi \circ \varphi^{-1}(t) = t^3$ es de clase C^∞ , pero $\varphi \circ \psi^{-1}(t) = t^{1/3}$ no es diferenciable en $t = 0$, de modo que $\varphi \circ \psi^{-1}(t) = t^{1/3}$ no es de clase C^∞ .

Definición 5 Una variedad diferencial m -dimensional de clase C^r ($r \geq 1$) es un par $(M, \mathcal{A})$, donde (M) es espacio topológico de Hausdorff con base numerable) y $(\mathcal{A})$ es un atlas maximal de clase C^r y dimensión m sobre (M) [13].

Por abuso de notación cuando no haya peligro de confusión se denotará el par $(M, \mathcal{A})$ simplemente por M , entendiendo que se refiere a la “variedad diferencial M ” con una estructura diferenciable $\mathcal{A}$. Para dotar a una variedad de una estructura diferenciable, basta con proporcionar un atlas diferenciable. La condición de maximalidad que aparece en la definición anterior es de carácter puramente técnico y puede omitirse, ya que cualquier atlas puede completarse de manera única hasta convertirse en un atlas maximal. En consecuencia, todo atlas diferenciable definido sobre un conjunto está contenido de forma exacta en un atlas maximal. Así pues, para definir una estructura diferenciable no se necesita especificar un atlas maximal sobre M , sino simplemente un atlas de clase C^r .

Ejemplo 3 La esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ con la topología inducida de $\mathbb{R}^3$ posee una estructura de variedad diferencial C^∞ y dimensión 2.

En efecto:

Sean $U_N = \mathbb{S}^2 - \{P_N\}$, $U_S = \mathbb{S}^2 - \{P_S\}$, donde $P_N = (0, 0, 1)$ y $P_S = (0, 0, -1)$ son, respectivamente los polos norte y sur de la esfera $\mathbb{S}^2$. Los conjuntos U_N y U_S son

abiertos en $\mathbb{S}^2$, pues existen $U = \mathbb{R}^3 - \{P_N\}$ y $V = \mathbb{R}^3 - \{P_S\}$ abiertos de $\mathbb{R}^3$ tales que $U_N = U \cap \mathbb{S}^2$, $U_S = V \cap \mathbb{S}^2$ con $\mathbb{S}^2 = U_N \cup U_S$

Se obtiene geoméricamente las aplicaciones φ_N y φ_S así como también sus inversas.

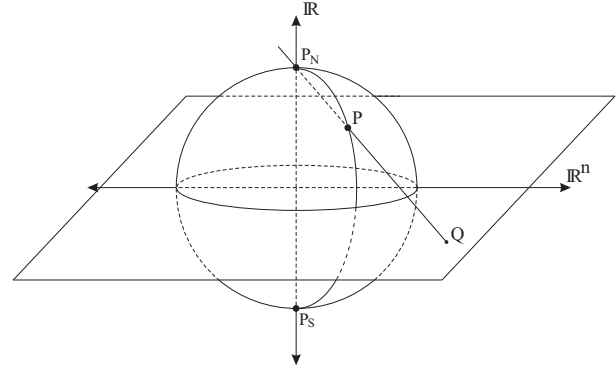


Fig. 3. Proyección estereográfica

En la figura 3 se observa que $\overline{P_N P} // \overline{P_N Q}$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overline{P_N P} = \lambda \overline{P_N Q}$$

$$(x, y, z - 1) = \lambda(x', y', -1)$$

$$x = \lambda x', y = \lambda y', z = 1 - \lambda$$

De donde, como $P = (x, y, z) \in \mathbb{S}^n$ se tiene la igualdad

$$\lambda^2 x'^2 + \lambda^2 y'^2 + (1 - \lambda)^2 = 1;$$

$$\lambda(\lambda x'^2 + \lambda y'^2 - 2 + \lambda) = 0;$$

$$\lambda = \frac{2}{1 + x'^2 + y'^2}$$

luego:

$$\varphi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi_N(x, y, z) = \frac{1}{1 - z}(x, y)$$

$$\varphi_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi_S(x, y, z) = \frac{1}{1 + z}(x, y)$$

$\varphi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow U_N$ y $\varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow U_S$ donde

$$\varphi_N^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

$$\varphi_S^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

$$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

estas aplicaciones φ_N , φ_S son homeomorfismos y son llamados respectivamente proyecciones estereográficas norte y sur, luego $U_N \cap U_S = \mathbb{S}^n - \{P_N, P_S\}$,

$\varphi_N(U_N \cap U_S) = \varphi_S(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^n - \{0\}$ y $\mathcal{A} = \{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$

Siendo $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1} = (\varphi_N \circ \varphi_S^{-1})^{-1}$, resulta que $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ es un difeomorfismo de C^∞ ; en consecuencia, los dos sistemas de coordenadas locales en $\mathbb{S}^2$ son compatibles.

B. Una breve descripción general de SageMath

SageMath (o Sage) [9] es un software matemático libre y de código abierto diseñado para el cálculo matemático avanzado, basado en el lenguaje de programación Python. Hace uso de más de 90 paquetes de código abierto, entre los cuales se encuentran Maxima y Pynac (cálculo simbólico), GAP (teoría de grupos), PARI/GP (teoría de números), Singular (cálculos polinomiales) y matplotlib (gráficos 2D de alta calidad). SageMath se basa en el lenguaje de programación Python, lo que facilita su uso tanto para estudiantes como para investigadores y docentes. Permite realizar cálculos simbólicos y numéricos, crear gráficos, programar algoritmos matemáticos y trabajar de forma interactiva a través de cuadernos (notebooks), ya sea en modo local o desde un navegador web. Sage fue creado en 2005 por W. Stein [15]. Gracias a su carácter colaborativo y a la integración de múltiples bibliotecas matemáticas reconocidas, SageMath es una herramienta versátil que apoya la enseñanza, el aprendizaje y la investigación científica en diversas áreas de las matemáticas y la computación.

C. El proyecto SageManifolds

Sage está bien desarrollado en muchas áreas de las matemáticas, pero existe muy poco en lo que respecta a la geometría diferencial y al cálculo tensorial. El objetivo de SageManifolds [9] es permitir trabajar con objetos geométricos intrínsecos (variedades, cartas, campos vectoriales, formas diferenciales, tensores, conexiones afines, métricas pseudo-Riemannianas, curvatura, geodésicas, subvariedades, etc.) con los siguientes propiedades: (i) debe ser posible introducir diversas sistema de coordenadas o cartas sobre una variedad diferencial, con las aplicaciones de cambio de coordenadas; (ii) las variedades diferenciales de dimensión m puede ser incrustada (sumergida suavemente) en un espacio euclídeo $\mathbb{R}^{2m+1}$ (teorema de Whitney), es decir toda variedad diferencial es localmente semejante a un espacio euclidiano. En términos concretos, el proyecto consiste en crear nuevas sección de Python, tales como `Manifold`, `Chart`, `TensorField` o `Metric`, para implementarlas dentro del patrón/elemento y codificar las operaciones matemáticas como métodos de clase.

Por ejemplo, la clase `Manifold`, se dedica a las variedades diferenciales reales, es una clase patrón, es decir, hereda de la clase patrón de Sage. Por otro lado, la clase dedicada a los puntos de la variedad, `ManifoldPoint`, es una clase elemento, por lo tanto, hereda de la clase elemento de Sage. Esto se ilustra mediante el diagrama de herencia de la Fig 4. En este diagrama, cada clase situada en la base de una flecha es una subclase (también llamada clase derivada) de la clase situada en la punta de la flecha. Sin embargo, que el tipo real de un patrón es una clase generada dinámicamente que tiene en cuenta la categoría matemática a la que pertenece. Por ejemplo, el tipo de una variedad diferencial no es `Manifold`, sino una subclase de esta denominada `Manifold with category`, lo que refleja el hecho de que `Manifold` está declarada en la categoría

de los conjuntos. Obsérvese también que la clase `Manifold` hereda de la clase `UniqueRepresentation` de Sage, lo que garantiza que existe una única instancia de variedad para una dimensión y un nombre dado.

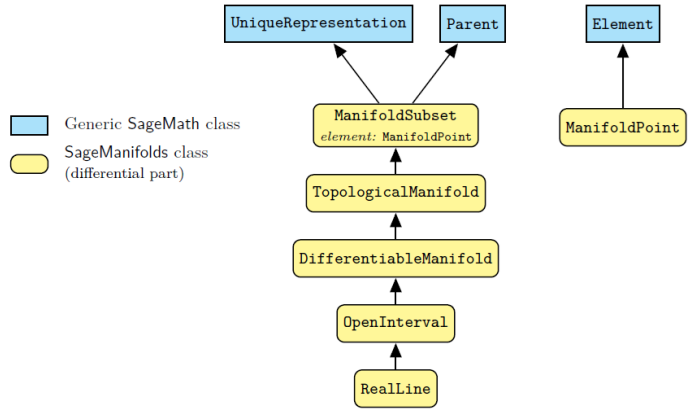


Fig. 4. Clases de Python para variedades diferenciales (`Manifold`), subconjuntos genéricos de ellas (`ManifoldSubset`), sub conjuntos abiertos de ellas (`ManifoldOpenSubset`) y puntos en ellas (`ManifoldPoint`). [?].

D. Implementación de las sistema de coordenadas de $\mathbb{S}^2$ con SageMath

Mostraremos algunas de las capacidades de geometría diferencial de SageMath con el ejemplo de una esfera bidimensional $\mathbb{S}^2$. Al momento de realizar este trabajo, la última versión disponible de SageMath era la versión 10.7. Primero configuramos el notebook para que todas las salidas se muestren con $\text{\LaTeX}$:

```
In[1]:%display latex
```

La 2-esfera, con cartas predefinidas y una incrustación en el espacio euclídeo tridimensional, puede obtenerse directamente del catálogo de variedades de SageMath

```
In[2]:S2 = manifolds.Sphere(2)
      S2
```

```
Out[2]:  $\mathbb{S}^2$ 
```

La función `Manifold` genera una variedad sin cartas de coordenadas predefinidas, de modo que el atlas de la variedad (definido por el usuario) está vacío y no hay que confundirlo con el atlas maximal de una variedad diferenciable

```
In[3]: S2.atlas()
Out[3]: []
```

Se necesitan al menos dos cartas para cubrir la esfera. Elijamos las cartas asociadas a las proyecciones estereográficas sobre el plano ecuatorial desde el polo norte y el polo sur, respectivamente. Primero introducimos los subconjuntos abiertos cubiertos por estas dos cartas: $U = \mathbb{S}^2 - \{N\}$ y $V = \mathbb{S}^2 - \{S\}$ donde N es un punto de $\mathbb{S}^2$, al que llamaremos el polo norte, y S es un punto de $\mathbb{S}^2$, al que llamaremos el polo sur

```
In[4]:U = S2.open_subset('U')
      print(U)
```

```
Out[4]: Open subset U of the 2-dimensional
differentiable manifold S^2
```

```
In[5]: V = S2.open_subset('V')
print(V)
```

```
Out[5]: Open subset V of the 2-dimensional
differentiable manifold S^2
```

Declaramos que $S^2 = U \cup V$

```
In[6]: S2.declare_union(U, V)
```

La carta estereográfica en U se construye a partir de la proyección estereográfica desde el Polo Norte sobre el plano ecuatorial: en la Fig. 3 que se muestra a continuación, las coordenadas estereográficas (x, y) del punto $P \in U$ son las coordenadas cartesianas del punto Q en el plano ecuatorial. Llamamos a esta carta `stereoN` y la construimos mediante el método `chart`:

```
In[7]: stereoN.<x,y> = U.chart()
```

La sintaxis `<x,y>` en el lado izquierdo implica que los nombres de Python x y y se añaden al espacio de nombres global, para poder acceder a las dos coordenadas de la carta como variables simbólicas. Esto permite referirse posteriormente a las coordenadas mediante esos nombres.

Además, en el presente caso, la función `chart()` no tiene argumentos, lo que implica que los símbolos de las coordenadas serán x y y (es decir, exactamente los caracteres que aparecen en el operador `<...>`) y que el rango de cada coordenada es $(-\infty, +\infty)$.

Con este comando hemos definido una carta global $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuyas funciones coordenadas son x, y .

```
In[8]: stereoN
```

```
Out[8]: (U, (x, y))
```

```
In[9]: print(stereoN)
```

```
Out[9]: Chart (U, (x, y))
```

```
In[10]: stereoN.coord_range()
```

```
Out[10]: x: (-∞, +∞); y: (-∞, +∞)
```

```
In[11]: stereoN[1]
```

```
Out[11]: x
```

```
In[12]: y is stereoN[2]
```

```
Out[12]: True
```

Las coordenadas son expresiones simbólicas de SageMath:

```
In[13]: type(y)
```

```
Out[13]: <class 'sage.symbolic.expression.
Expression'>
```

Introducimos en V las coordenadas (x', y') correspondientes a la proyección estereográfica desde el Polo Sur

```
In[14]: stereoS.<xp,yp> = V.chart("xp:x' yp:y'")
```

En este caso, el argumento de tipo cadena que se pasa a `chart` estipula que los nombres de texto simple de las

coordenadas son x_p y y_p (los mismos que los nombres de las variables de Python definidas dentro del operador `<...>` en el lado izquierdo), mientras que sus nombres en $\text{\LaTeX}$ son x' y y'

```
In[15]: stereoS
```

```
Out[15]: (V, (x', y'))
```

Para hacer un gráfico de las coordenadas en función de si mismas usamos la función `plot()`. a partir de la proyección estereográfica desde el Polo Norte

```
In[16]: graph = stereoN.plot(chart=cartesian,
mapping=Phi, number_values=25, label_axes=False)
graph
```

```
Out[16]: ver Fig. 5
```

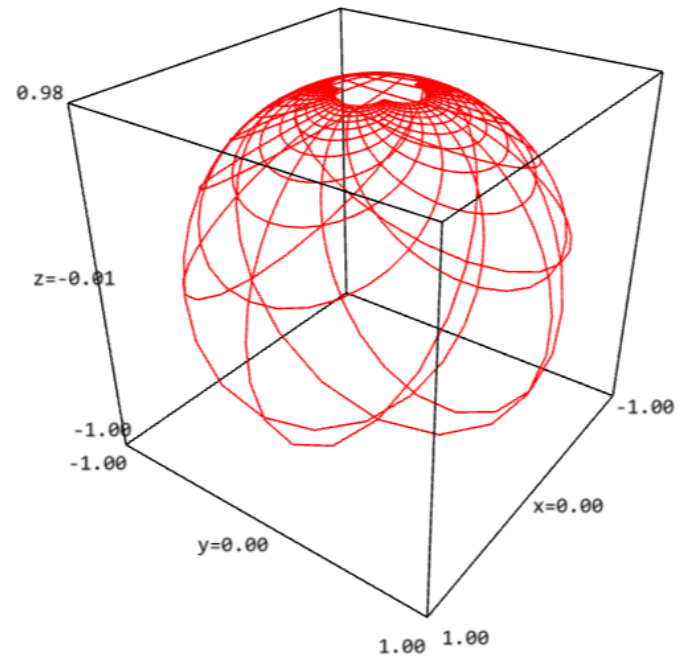


Fig. 5. Coordenadas estereográficas desde el Polo Norte

Del mismo modo de puede agregar el gráfico de las coordenadas a partir de la proyección estereográfica desde el Polo Sur

```
In[17]: graph += stereoS.plot(chart=cartesian, mapp
color='green', label_axes=False)
graph
```

```
Out[17]: ver Fig. 6 En esta etapa, el atlas definido por el
usuario sobre la variedad está compuesto por dos cartas:
```

```
In[18]: S2.atlas()
```

```
Out[18]: [(U, (x, y)), (V, (x', y'))]
```

Para completar la construcción de la estructura de variedad, debemos especificar la aplicación cambio de coordenadas entre las cartas $\text{stereoN} = (U, (x, y))$ y $\text{stereoS} = (V, (x', y'))$; esta viene dada por las fórmulas estándar de inversión

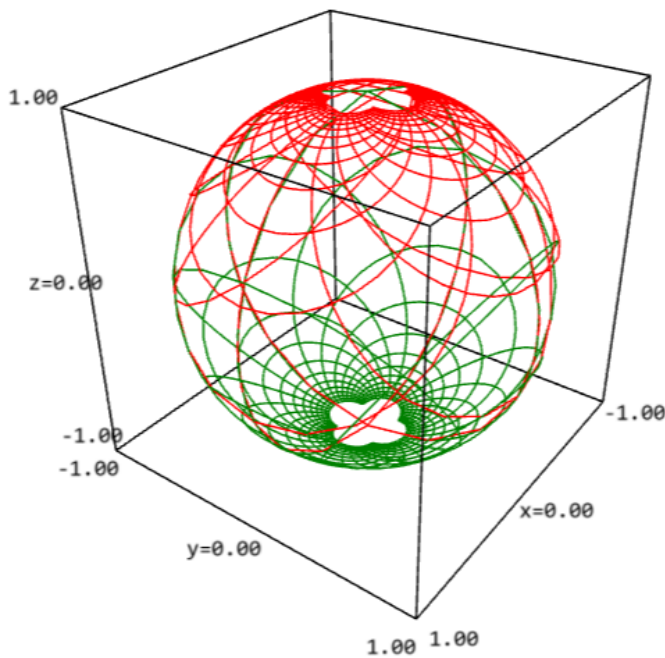


Fig. 6. Coordenadas estereográficas en función de sí mismas

```
In[19]:stereoN_to_S = stereoN.transition_map
(stereoS, (x/(x^2+y^2), y/(x^2+y^2)),
intersection_name='W',
restrictions1= x^2+y^2!=0,
restrictions2= xp^2+yp^2!=0)
stereoN_to_S.display()
```

Out [19]:

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

En la declaración anterior, $W = U \cap V$ donde está definido el cambio de coordenadas. La condición $x^2 + y^2 \neq 0$ define en W como un subconjunto de U , y la condición $x'^2 + y'^2 \neq 0$ define en W como un subconjunto de V .

La transformación de coordenadas inversa se calcula mediante el sintaxis `inverse()`

```
In[20]:stereoS_to_N = stereoN_to_S.inverse()
stereoS_to_N.display()
```

Out [20]:

$$\begin{cases} x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} \\ y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2} \end{cases}$$

En el presente caso, la situación es, por supuesto, perfectamente simétrica con respecto a las coordenadas (x, y) y (x', y')

En esta etapa, el atlas cuenta con cuatro cartas:

```
In[21]:S2.atlas()
```

```
Out [21]: [(U, (x, y)), (V, (x', y')), (W, (x, y)), (W, (x', y'))]
```

Guardemos $W = U \cap V$ en una variable de Python para su uso posterior

```
In[22]:W = U.intersection(V)
```

De manera similar, guardamos las cartas $(W, (x, y))$ como la restricción de $(U, (x, y))$ a W y $(W, (x', y'))$ como la restricción de $(V, (x', y'))$ a W en variables de Python

```
In[23]:stereoN_W = stereoN.restrict(W)
stereoN_W
```

```
Out [23]: (W, (x, y))
```

```
In[24]:stereoS_W = stereoS.restrict(W)
stereoS_W
```

```
Out [24]: (W, (x', y'))
```

Las cartas de coordenadas están dotadas de un sintaxis `plot`. Por ejemplo, podemos representar la carta $(W, (x', y'))$ en términos de sí misma, como una cuadrícula:

```
In[25]:stereoS_W.plot()
```

Out [25]: ver Fig. 7

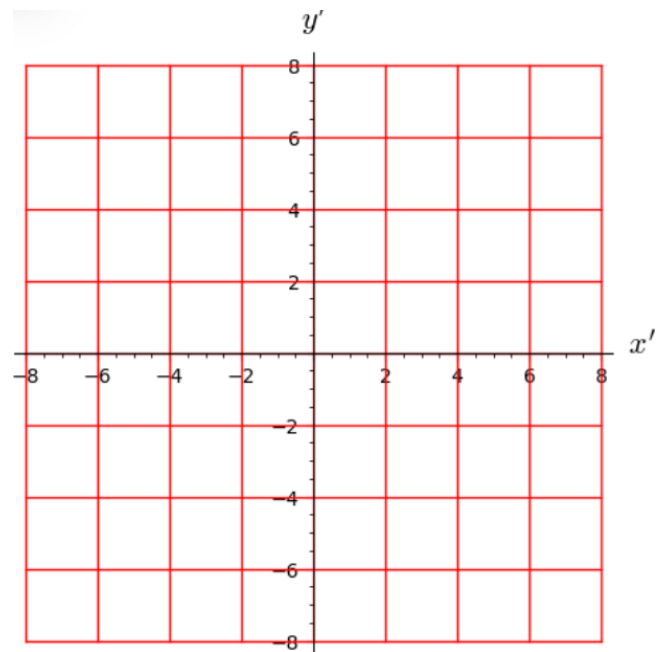


Fig. 7. Coordenadas cartesianas en función de sí mismas

De manera más interesante, representemos la carta estereográfica (x', y') en términos de la carta estereográfica (x, y) sobre el dominio W , donde ambos sistemas se superponen. Dividimos la representación en cuatro partes para evitar la singularidad en $(x', y') = (0, 0)$ y pedimos que las líneas de coordenadas a lo largo de las cuales varía x' (respecto a y') se coloreen en púrpura (respecto a cyan)

```
In[26]:graph = (stereoS_W.plot(stereoN,
ranges={xp: [-6, -0.02], yp: [-6, -0.02]},
color={xp: 'purple', yp: 'cyan'})
```

```

+ stereoS_W.plot(stereoN, ranges=
{xp:[-6,-0.02], yp:[0.02,6]},
color={xp: 'purple', yp: 'cyan'})
+ stereoS_W.plot(stereoN, ranges=
{xp:[0.02,6], yp:[-6,-0.02]},
color={xp: 'purple', yp: 'cyan'})
+ stereoS_W.plot(stereoN, ranges=
{xp:[0.02,6], yp:[0.02,6]},
color={xp: 'purple', yp: 'cyan'})
graph.show(xmin=-1.5, xmax=1.5,
ymin=-1.5, ymax=1.5)

```

Out [26]: ver Fig. 8

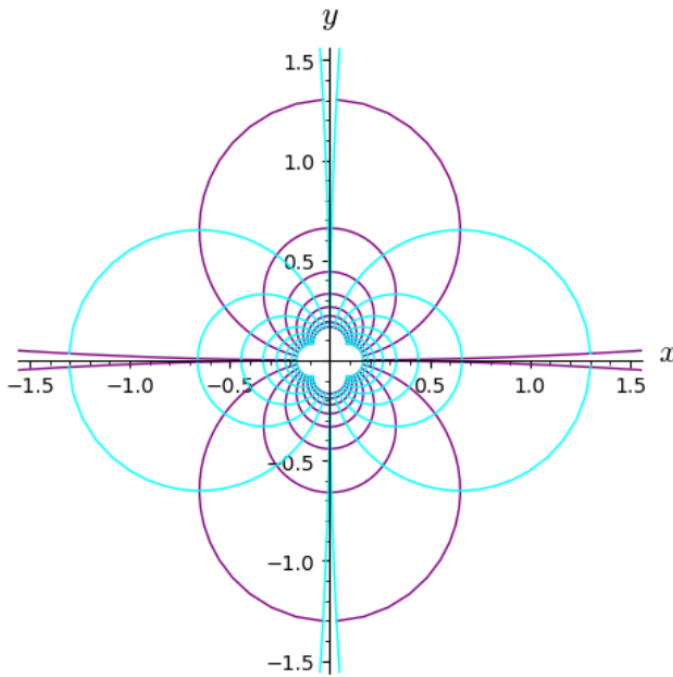


Fig. 8. representación de la carta estereográfica (x', y') en términos de la carta estereográfica (x, y) sobre el dominio W

III. MÉTODOS

A. Diseño

El estudio se desarrolló bajo un enfoque cuantitativo, ya que permitió recolectar y analizar datos numéricos con el fin de examinar y describir la relación entre las variables de investigación. Se utilizó un diseño pre-experimental, específicamente un esquema de pretest y posttest con un solo grupo, lo que permitió identificar el nivel de resolución de problemas de variedades diferenciales en los estudiantes Universitarios de Ciencias Físico Matemáticas. A partir de los resultados obtenidos en el pretest, se aplicó el software SageMath con el propósito de mejorar el nivel de resolución de problemas de variedades diferenciales en dichos estudiantes.

B. Población y muestra

La población estuvo conformada por 252 estudiantes matriculados en el ciclo 2025-II en la escuela profesional de ciencias

Físico Matemáticas de la Universidad Nacional del Altiplano, mientras que la muestra estuvo constituida por 33 estudiantes, seleccionados mediante un muestreo no probabilístico por conveniencia.

C. Instrumentos

En cuanto a los instrumentos utilizados para la recolección de datos, esto son la técnica de observación, se elaboraron los instrumentos que nos permiten recoger la información y medir la variable dependiente (Resolución de problemas variedades diferenciales) para determinar la influencia de la variable independiente (Software SageMath).

La Prueba de Resolución de Problemas Matemáticos es una prueba objetiva diseñada y elaborada por el autor de esta investigación, basada en el modelo de George Pólya. De acuerdo con dicho modelo, la prueba contempla cuatro dimensiones: comprensión, planificación, ejecución y comprobación, las cuales se desagregan en diez indicadores. Cada indicador está representado por un ítem redactado en forma de pregunta.

La prueba incluye tres problemas matemáticos. En cada uno de ellos se evalúan las mismas dimensiones, indicadores e ítems, por lo que el instrumento consta de un total de 30 preguntas. Cada respuesta correcta equivale a un punto, de manera que el puntaje máximo que puede obtener un estudiante en la prueba es de 30 puntos. Para la validación del instrumento se aplicó la prueba estadística binomial, el cual evidenció que hay concordancia entre los expertos ($p_c = 0.0454$). Para determinar el grado de confiabilidad del instrumentos sobre la pre test- post test la prueba Spearman-Brown, el cual evidenció que una excelente confiabilidad ($\alpha = 0.837$)

D. Procedimientos

Para la obtención de la información se aplicó un procedimiento organizado y metódico. Inicialmente, se gestionó el permiso correspondiente ante las autoridades de la escuela profesional para ejecutar la investigación. Tras obtener la autorización, los estudiantes fueron convocados a participar en el estudio mediante el docente del curso, se les informó sobre los objetivos de la investigación y se les proporcionaron orientaciones precisas para responder adecuadamente las preguntas.

E. Análisis de datos

El análisis estadístico se realizó mediante técnicas estadísticas descriptivas e inferenciales. En primer lugar, se calcularon estadísticos descriptivos a nivel de variables, dimensiones e ítems. Posteriormente, se aplicó la prueba T de Student para muestras relacionadas, debido a que las mismas, están en un nivel nominal, de tal manera identificar diferencias estadísticamente significativas en relación con el software SageMath y la dependencia del resolución de problemas de variedades diferenciales.

IV. RESULTADOS

Para determinar la normalidad se aplicó la prueba estadística de Shapiro Wilk, para una muestra con nivel de significancia $\alpha = 0.05$, la TABLA I nos muestra que su nivel de significancia de ambos datos son mayores a 0.05, lo que significa que el conjunto de datos muestran una distribución normal. Por lo tanto se aplica la pruebas paramétricas, en este caso se aplicó para prueba de hipótesis general y específica de prueba T para muestras relacionadas

TABLA I
PRUEBA DE NORMALIDAD

	Shapiro - Wilk		
	Estadística	gl	Sig.
Pre Prueba	0.968	33	0.455
Post Prueba	0.957	33	0.222

Elaboración de los autores a partir de los datos de investigación

De la TABLA II se observa que el software SageMath influye significativamente en la resolución de problemas de variedades diferenciales en los estudiantes, hubo un incremento en el nivel de resolución de problemas ($t(31) = 23.204$, $p < 0.05$) entre los puntajes de pre test ($\mu_1 = 8.6041$) y post test ($\mu_2 = 13.9791$) de asistir a la sesión del programa experimental.

TABLA II
PRUEBA DE MUESTRA EMPAREJADAS

	Diferencias emparejadas			t	sig.
	Media	N	Desviación estándar		
Post Prueba	13.9791	33	3.0546		
Pre Prueba	8.6041	33	2.3314		
Post Test- Pre Prueba	5.37500	33	1.3103	23.204	0.000

Elaboración de los autores a partir de los datos de investigación

De la TABLA III se observa que el software SageMath no influye significativamente en la etapa de comprensión en los estudiantes, hubo un pequeño incremento en la etapa de comprensión ($t(31) = 0.892$, $p > 0.05$) entre los puntajes de pre test ($\mu_1 = 15.2784$) y post test ($\mu_2 = 15.5566$) de asistir a la sesión del programa experimental.

TABLA III
PRUEBA DE MUESTRA EMPAREJADAS

	Diferencias emparejadas			t	sig.
	Media	N	Desviación estándar		
Post Prueba	15.5566	33	2.82347		
Pre Prueba	15.2784	33	3.32820		
Post Test- Pre Prueba	0.27812	33	0.31188	0.892	0.379

Elaboración de los autores a partir de los datos de investigación

De la TABLA IV se observa que el software SageMath influye significativamente en la etapa de planificación en los estudiantes, ($t(31) = 7.564$, $p < 0.05$) entre los puntajes de

TABLA IV
PRUEBA DE MUESTRA EMPAREJADAS

	Diferencias emparejadas			t	sig.
	Media	N	Desviación estándar		
Post Prueba	13.1259	33	5.27652		
Pre Prueba	9.0978	33	3.58570		
Post Test- Pre Prueba	4.02813	33	0.53252	7.564	0.000

Elaboración de los autores a partir de los datos de investigación

pre test ($\mu_1 = 9.0978$) y post test ($\mu_2 = 13.1259$) de asistir a la sesión del programa experimental.

De la TABLA V se observa que el software SageMath influye significativamente en la etapa de ejecución en los estudiantes, ($t(31) = 14.700$, $p < 0.05$) entre los puntajes de pre test ($\mu_1 = 0.8325$) y post test ($\mu_2 = 13.6806$) de asistir a la sesión del programa experimental.

TABLA V
PRUEBA DE MUESTRA EMPAREJADAS

	Diferencias emparejadas			t	sig.
	Media	N	Desviación estándar		
Post Prueba	13.6806	33	5.11462		
Pre Prueba	0.8325	33	1.66798		
Post Test- Pre Prueba	12.84813	33	4.94437	14.700	0.000

Elaboración de los autores a partir de los datos de investigación

De la TABLA VI se observa que el software SageMath influye significativamente en la etapa de comprobación en los estudiantes, ($t(31) = 2.437$, $p < 0.05$) entre los puntajes de pre test ($\mu_1 = 10.4156$) y post test ($\mu_2 = 12.9163$) de asistir a la sesión del programa experimental.

TABLA VI
PRUEBA DE MUESTRA EMPAREJADAS

	Diferencias emparejadas			t	sig.
	Media	N	Desviación estándar		
Post Prueba	12.9163	33	6.96831		
Pre Prueba	10.4156	33	7.17089		
Post Test- Pre Prueba	2.50063	33	1.02607	2.437	0.021

Elaboración de los autores a partir de los datos de investigación

V. DISCUSIÓN

El uso del software SageMath ejerce una influencia positiva y significativa en la resolución de problemas relacionados con variedades diferenciales en los estudiantes de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas. En comparación con los métodos tradicionales de enseñanza, los estudiantes que emplearon SageMath mostraron una mayor capacidad para realizar cálculos simbólicos complejos y visualizar estructuras geométricas propias de las variedades diferenciales incrustadas a espacios euclidiano, lo cual coincide con lo señalado por [16] respecto al valor de las herramientas computacionales en

la enseñanza de esta disciplina.

Uno de los hallazgos más relevantes es que SageMath facilitó la integración entre la teoría y la práctica, permitiendo a los estudiantes explorar de manera dinámica nociones como variedades, campos vectoriales, métricas y conexiones. Este tipo de interacción favorece el aprendizaje significativo, ya que posibilita la comprobación de resultados teóricos mediante simulaciones y representaciones gráficas, reduciendo errores de cálculo y fortaleciendo la intuición matemática, tal como lo sostienen [17] al analizar el impacto de entornos matemáticos dinámicos en la educación superior.

Asimismo, se observó un incremento en la autonomía y motivación de los estudiantes al abordar problemas de mayor complejidad. El entorno computacional de SageMath permitió experimentar con distintos ejemplos y modificar parámetros en tiempo real, promoviendo el pensamiento exploratorio y el aprendizaje activo. Estos resultados son coherentes con los planteamientos de [18], quien afirma que la tecnología contribuye al desarrollo del pensamiento matemático avanzado cuando se integra de manera adecuada en el proceso educativo.

Desde el punto de vista del rendimiento académico, los resultados concuerdan con investigaciones previas que evidencian que el uso de sistemas algebraicos computacionales mejora el desempeño de los estudiantes en matemáticas avanzadas [19]. En particular, SageMath, al ser un software de código abierto con potentes capacidades simbólicas y gráficas, ofrece un entorno flexible y accesible que favorece el aprendizaje profundo de conceptos complejos [15].

No obstante, también se identificaron algunas limitaciones. Una parte de los estudiantes presentó dificultades iniciales en el manejo del software, lo que pone de manifiesto la necesidad de una capacitación previa y de una adecuada mediación docente. En este sentido, [20] advierten que la incorporación de tecnología en la enseñanza de las matemáticas debe estar acompañada de estrategias didácticas claras para evitar un uso meramente instrumental.

En consecuencia, los resultados sugieren que el software SageMath no debe considerarse un sustituto del razonamiento matemático tradicional, sino una herramienta complementaria que potencia el proceso de enseñanza-aprendizaje cuando se articula con el desarrollo teórico y analítico. La combinación equilibrada de métodos tradicionales y recursos tecnológicos se perfila como una estrategia eficaz para la enseñanza de las variedades diferenciales en la formación universitaria.

Entre las fortalezas de esta investigación aporta evidencia empírica que respalda la incorporación sistemática de SageMath en cursos avanzados de matemáticas, contribuyendo al fortalecimiento del aprendizaje y de la formación científica de los estudiantes de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas. Futuras investigaciones podrían ampliar este

enfoque hacia otras áreas de la matemática avanzada o analizar el impacto del software en el desarrollo de competencias investigativas y de modelación matemática.

VI. CONCLUSIONES

Los hallazgos permite concluir que el uso del software SageMath ejerce una influencia positiva y significativa en la resolución de problemas de variedades diferenciales en los estudiantes Universitarios de Ciencias Físico Matemáticas. La integración de esta herramienta tecnológica favorece la comprensión de conceptos abstractos como variedades diferenciales, al permitir la visualización, experimentación y verificación de resultados matemáticos de manera dinámica e interactiva. Asimismo, SageMath contribuye al desarrollo del pensamiento lógico y computacional, fortaleciendo la capacidad de los estudiantes para analizar, modelar y resolver problemas complejos propios del cálculo y la geometría diferencial.

Por ello, se sugiere que la universidad implementen programas que fortalezcan la motivación y participación activa de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, promoviendo un enfoque más autónomo y reflexivo. Esto podría incluir talleres sobre software SageMath y resolución de problemas usando softwares matemáticos en la enseñanza universitaria, puesto que no solo optimiza el desempeño académico, sino que también responde a las demandas actuales de una formación científica apoyada en tecnologías digitales.

AGRADECIMIENTOS

Estamos muy agradecidos con los colegas del departamento académico de Ciencias Físico Matemáticas, por su apoyo y colaboración a la presente investigación llevada a cabo en la Universidad Nacional del Altiplano-Puno.

Agradecemos también por el financiamiento al proyecto de investigación del docentes investigadores Renacyt 2025 de la Universidad Nacional del Altiplano

REFERENCIAS

- [1] N. Nhlanhla, A. Oluwasegun, C. Colledge, *A systematic review of information and communication technologies (ICTs) on student motivation: researchers' reflections on a selected higher education institution (HEIs)*. Global Knowledge, Memory and Communication, 2023. pp. 77-100, <https://doi.org/10.1108/GKMC-03-2024-0129>.
- [2] J. López, J. Patiño, A. Valencia, *Use and adoption of ICTs oriented to university student learning: Systematic review using PRISMA methodology* Cogent Education, 2023, <https://doi.org/10.1080/2331186X.2023.2288490>.
- [3] F. Cedeño, A. Torres, *Impacto de las TIC en la enseñanza-aprendizaje: caso de estudio en la carrera de Tecnología de la Información de la Universidad Técnica de Manabí* Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo, 2025, <https://doi.org/10.1080/2331186X.2023.2288490>.
- [4] R. Navarro, *Infraestructura tecnológica en los procesos de enseñanza-aprendizaje en instituciones educativas: una revisión sistemática* Propósitos y Representaciones, 2025, <https://doi.org/10.23913/ride.v15i29.2099>.
- [5] M. Köppe, *la reforma de sage Software matemático – ICMS 2024: 8va Conferencia internacional*, 2024, pp. 3-11, <https://doi.org/10.1007/978-3-031-64529-7>

- [6] C. Rojas, M. Allahbakhshi, *Integración de SageMath y Canvas LMS como modelo de aprendizaje asincrónico e interactivo en un curso introductorio de álgebra lineal* Nuevas tecnologías en la educación y la formación: Actas seleccionadas de la 5ta Conferencia internacional sobre avances en educación y tecnología de la información, 2024, pp. 61-71, <https://doi.org/10.1007/978-981-97-3883-0-6>
- [7] P. Belmans, H. Franzen, G. Petrella, *The QuiverTools package for SageMath and Julia* arXiv:2506.19432, 2025, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2506.19432>
- [8] D. Borovsky, J. Hanc, M. Hancova, *Scientific Computing with Open SageMath not only for Physics Education* Journal of Physics: Conference Series, Volume 3037, 2025, <https://doi.org/10.1088/1742-6596/3037/1/012006>
- [9] A. Chrzyszczuk, *Sage manifolds Differential geometry and tensor calculus with SageMath* sage manifolds, Accedido: 08 diciembre. 2025. [En línea]. Disponible en: <https://sagemanifolds.obspm.fr/index.html>
- [10] M. Do carmo, *Geometria Riemanniana*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Brasil, 2019.
- [11] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer. Nueva York, 2017.
- [12] S. Plaza, *Variedades Diferenciables.*, 2008.
- [13] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer. Nueva York, 2012.
- [14] W. Boothby, *An Introductions to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Springer. Nueva York, 2002.
- [15] D. Joyner, W. Stein, *SAGE Tutoria* 2006. Accedido: 08 diciembre. 2025. Disponible en: https://wstein.org/msri06/refs/sage_tutorial.pdf
- [16] T. Dray, C. Manogue, *Putting Differentials Back into Calculus* The College Mathematics Journal, vol. 41, no. 2, 2010, pp. 90–100 <https://doi.org/10.4169/074683410x480195>.
- [17] A. Moreno, L. Hegedus, J. Kaput, *From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives* Studies in Mathematics, 2008, <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9116-6>.
- [18] D. Tall, *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics* Cambridge University Press, 2013, <https://doi.org/10.1017/CBO9781139565202>
- [19] A. Mehmet, I. Tevfik, *The Effect of Mathematics Instruction through Computer Algebra Systems on the Academic Achievements of Secondary Education Students: Turkey Example* Journal of Education and e-Learning Research, vol. 5, no. 3, 2018, pp. 165–173, <https://doi.org/10.4169/074683410x480195>.
- [20] R. Cantoral, R. M. Farfán, *Matemática educativa: Una visión de su evolución* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, vol. 6, no. 1, 2003, pp. 27–40