

Analysis and Simulation of RC Electric Circuit Model by Fractional Differential Equations

1^{er} Raul Champi Apaza

Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
champiraul2018@gmail.com

2^{do} Richar Marlon Mollinedo Chura

Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
rmollinedo@unap.edu.pe

3^{ro} Eliseo Pumacallahui Salcedo

Departamento Académico de Ciencias Básicas
Universidad Nacional Intercultural de Quillabamba
Quillabamba, Perú
eliseo.pumacallahui@uniq.edu.pe

4^{to} Roger Ccama Alejo

Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
rccama@unap.edu.pe

5^{to} Fredy Gonzalo Copari Romero

Departamento Académico de Ingeniería Estadística e Informática
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
fcopari@epg.unap.edu.pe

6^{to} William Walker Mamani Apaza

Departamento Académico de Educación
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
wwmamani@unap.edu.pe

7^{to} Leonidas Vilca Callata

Departamento Académico de Ingeniería Mecánica Eléctrica
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
lvilca@unap.edu.pe

Abstract—In this research work, the analytical solutions with Caputo and Caputo-Fabrizio derivative were analyzed in the RC electric circuit model from integer order to fractional order, with the objective of analyzing and simulating the RC electric circuit model by means of fractional order equations, so the RC electric circuit model was analyzed by different methods of solution of fractional order differential equations and the simulation of the RC electric circuit model was performed using Wolfram Mathematica 10.4 software. The methodology of this research is framed in the descriptive-deductive. For the modeling, the physical laws and the transition from the ordinary derivative operator to the fractional operator were used, then for the analytical solution it was analyzed by means of the special Mittag-Leffler function, Laplace transform and the inverses of some functions. Finally, for the simulation of a constant source and periodic source of the RC electric circuit model of fractional order, the Wolfram Mathematica 10.4 software was used. The most relevant result is that an analogy was established between the ordinary differential equations and the fractional differential equations by means of Caputo and Caputo-Fabrizio fractional derivatives. This allowed to analyze the behavior of the RC electric circuit.

Index Terms—Fractional Derivative, Differential Equations of fractional order, Electric Circuit (RC).

Análisis y Simulación del Modelo Circuito Eléctrico RC Mediante Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias

1^{er} Raul Champi Apaza

Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
champiraul2018@gmail.com

2^{do} Richar Marlon Mollinedo Chura

Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
rmollinedo@unap.edu.pe

3^{ro} Eliseo Pumacallahui Salcedo

Departamento Académico de Ciencias Básicas
Universidad Nacional Intercultural de Quillabamba
Quillabamba, Perú
eliseo.pumacallahui@uniq.edu.pe

4^{to} Roger Ccama Alejo

Departamento Académico de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
rccama@unap.edu.pe

5^{to} Fredy Gonzalo Copari Romero

Departamento Académico de Ingeniería Estadística e Informática
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
fcopari@epg.unap.edu.pe

6^{to} William Walker Mamani Apaza

Departamento Académico de Educación
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
wwmamani@unap.edu.pe

7^{to} Leonidas Vilca Callata

Departamento Académico de Ingeniería Mecánica Eléctrica
Universidad Nacional del Altiplano
Puno, Perú
lvilca@unap.edu.pe

Resumen—En este trabajo de investigación, se analizaron las soluciones analíticas con derivada de Caputo y Caputo-Fabrizio en el modelo circuito eléctrico RC de orden entero al orden fraccionario, con el objetivo de analizar y simular el modelo circuito eléctrico RC mediante ecuaciones de orden fraccionario, por lo que se analizó el modelo circuito eléctrico RC por diferentes métodos de solución de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario y se realizó la simulación del modelo circuito eléctrico RC usando software Wolfram Mathematica 10.4. La metodología de esta investigación se enmarca en el descriptivo-deductivo. Para el modelamiento se utilizaron las leyes físicas y la transición del operador derivado ordinario al operador fraccionario, luego para la solución analítica se analizó por medio de la función especial de Mittag-Leffler, transformada de Laplace y las inversas de algunas funciones. Finalmente para la simulación de una fuente constante y fuente periódica del modelo circuito eléctrico RC de orden fraccionario, se utilizó el software Wolfram Mathematica 10.4. El resultado más relevante es que se estableció una analogía entre las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones diferenciales fraccionarias mediante derivadas fraccionarias de Caputo y Caputo-Fabrizio. La cual permitió analizar el comportamiento del circuitos eléctricos RC.

Index Terms—Derivada Fraccionaria, Ecuaciones Diferenciales de orden fraccionaria, Circuito eléctrico (RC).

I. INTRODUCCIÓN

El cálculo de orden fraccionario es objeto de investigación desde hace mucho tiempo. En 1695, Leibniz y L'Hospital definieron la derivada media de una función como $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$, para $n = 1/2$. Riemann-Liouville, Cayley y otros matemáticos contribuyeron significativamente al desarrollo del cálculo de orden fraccionario; desde su primera conferencia en la década de 1970, el cálculo de orden fraccionario ha logrado avances significativos tanto en matemáticas puras como aplicadas. Hoy en día, las investigaciones son en matemáticas puras; aplicadas en ingeniería, física y química Ref. [1]–[4]; Así como en este trabajo de investigación, que modela el circuito eléctrico RC de orden fraccionaria utilizando las leyes Físicas mediante la transición del operador derivado ordinario al operador fraccionario para voltaje del capacitor en función del tiempo. luego se analiza por medio de una derivada fraccionaria de Caputo y Caputo-Fabrizio para una fuente Constante y fuente Periódica utilizando la Transformada de Laplace, luego por la Transformada inversa de Laplace acompañado por la función especial de Mittag-Leffler. finalmente se hace la simulación

utilizando el software WOLFRAM MATHEMATICA versión 10.4 para diferentes valores iniciales y diferentes valores de orden exponencial desde 0.2 al 1 e implícitamente demostrando un resultado óptimo para la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio.

II. MATERIALES Y MÉTODOS

Luego de la definición de f así como en [3], [5]. Para $[a, b]$ dominio en \mathbb{R} , se define la función Gamma para todo número positivo x Ref. [6]:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

también la función Beta $\beta : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por:

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt; \text{ para } x, y \text{ mayores a cero.}$$

La Transformada de Laplace para una función $f(t)$ está representada por $\mathcal{L}\{f(t)\}$, donde.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1)$$

En general, denotaremos la transformación por $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Finalmente se define la función Mittag-Leffler con sus respectivas Transformada de Laplace.

A. Función de Mittag-Leffler de un parámetro α

Para z variable y α parámetro, La función Mittag-Leffler para un parámetro se define en Ref. [3]:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}; (Re(\alpha) > 0) \quad (2)$$

B. Función de Mittag-Leffler de dos parámetros α, β .

Se generaliza el caso anterior así como sigue, donde z es una variable y α, β son dos parámetros con las mismas restricciones

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (3)$$

C. Transformada de Laplace de la Función Mittag-Leffler

Al aplicar Ecuación (1) en la Ecuación (2) y la primera derivada con respecto a t dada desde Ref. [7] es:

$$\mathcal{L}\{E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - \lambda} \quad (4)$$

$$\mathcal{L}\{E'_{\alpha}(\lambda t^{\alpha})\} = \frac{\lambda}{s^{\alpha} - \lambda} \quad (5)$$

Para s, α, β que pertenece a los complejos, $Re(\alpha) > 0$, $Re(\beta) > 0$, se cumple para todo $t \geq 0$, $Re(\lambda) > 1$.

$$\mathcal{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\lambda t^{\alpha})\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} - \lambda} \quad (6)$$

demostración

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}\right\} &= \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P e^{-ts} t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P e^{-st} t^{\beta-1+\alpha k} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \mathcal{L}\{t^{\beta+\alpha k-1}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{\Gamma(\alpha k + \beta)}{s^{\beta+\alpha k}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{s^{\beta+\alpha k}} \\ &= \frac{1}{s^{\beta}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s^{\alpha}}\right)^k \\ &= \frac{1}{s^{\beta}} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{s^{\alpha}}}; \text{ si } \left|\frac{\lambda}{s^{\alpha}}\right| < 1 \\ &= \frac{1}{s^{\beta}} \frac{s^{\alpha}}{s^{\alpha} - \lambda} \\ \mathcal{L}\{t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\lambda t^{\alpha})\} &= \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} - \lambda} \end{aligned}$$

■

D. Derivada fraccionaria de Caputo:

$${}^C D_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt \quad (7)$$

Donde $\alpha > 0$ es el orden de la derivada de f , $n = [\alpha] + 1 \in \mathbb{N}$; n es la parte entera de α más uno y su Transformada de Laplace es:

$$\mathcal{L}\{{}^C D_t^{\alpha} f(t)\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (8)$$

Donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$ y $n = [\alpha] + 1$.

E. Derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio:

La derivada fraccionaria de Caputo presenta una complejidad computacional; para evitar ese problema se propone la derivada de Caputo-Fabrizio; esta derivada es obtenida a partir del cambio de Kernel Ref. [8]; Caputo-Fabrizio propone una nueva definición de derivada fraccionaria. Esencialmente, para $0 < \alpha < 1$, proponen sustituir el núcleo integral $(x-t)^{-\alpha}$ presente en la definición clásica de la derivada fraccionaria de Caputo, por la función $\exp\left(\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right)$ y la constante multiplicativa $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$ por $M(\alpha) \in \mathbb{R}$, donde $M(\alpha)$ es un parámetro dependiente de α de modo que $M(0) = M(1) = 1$. Se obtiene así, para una función f , la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio.

$${}^{CF} D_x^{\alpha} f(x) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^x e^{-\frac{\alpha(x-t)}{1-\alpha}} f'(t) dt \quad (9)$$

Donde $\alpha \in [0, 1]$, $f(x) \in AC^n[a, b]$ para $a < b$ se define la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio; así mismo $\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}$ es una función de normalización con la propiedad $M(0) = M(1) = 1$. La transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio, se define como:

$$\mathcal{L}\{ {}_0^{CF}D_t^\alpha f(t) \} = \frac{sF(s) - f(0)}{s + \alpha(1-s)} \quad (10)$$

demostración

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ {}_0^{CF}D_t^\alpha f(t) \} &= \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t e^{\frac{-\alpha(t-u)}{1-\alpha}} f'(u) du \right\} \\ &\quad , M(\alpha) = 1 \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \mathcal{L}\left\{ \int_0^t e^{\frac{-\alpha(t-u)}{1-\alpha}} f'(u) du \right\} \\ \mathcal{L}\{ {}_0^{CF}D_t^\alpha f(t) \} &= \frac{1}{1-\alpha} \mathcal{L}\left\{ e^{\frac{-\alpha t}{1-\alpha}} * f'(u) \right\} \\ &\quad \text{por Transformada de Laplace} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \mathcal{L}\left\{ e^{\frac{-\alpha t}{1-\alpha}} \right\} \cdot \mathcal{L}\left\{ f'(u) \right\} \right\} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \frac{1}{s + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot s\mathcal{L}\{f(u)\} - f(0) \right\} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \frac{1-\alpha}{s(1-\alpha) + \alpha} \cdot (sF(s) - f(0)) \right\} \\ \mathcal{L}\{ {}_0^{CF}D_t^\alpha f(t) \} &= \frac{sF(s) - f(0)}{s + \alpha(1-s)} \end{aligned}$$

III. CONCEPTOS PRELIMINARES

la Ley de Ohm relaciona el valor de el resistor con la intensidad de corriente que lo atraviesa y la diferencia de potencial entre sus extremos.

$$V_R(t) = R i(t) \quad (11)$$

Donde: $i(t)$ es la corriente, medido en amperios (A), $V_R(t)$ es voltaje del resistor medido en voltios V , y R es el resistor del conductor, medida en ohmios Ω .

El circuito RC esta compuesto de resistencia R y capacitor C alimentados por una fuente eléctrica E (batería), entre las características de los circuitos RC está la propiedad de ser lineales invariantes en el tiempo, como se muestra en la Figura 1.

Ley del voltaje de Kirchhoff para un circuito RC es La suma algebraica de los voltajes en torno a cualquier circuito cerrado en un circuito es idéntica a cero en todo momento Ref. [9].

$$V_R + V_C = E(t) \quad (12)$$

En la construcción de la ecuaciones diferencial fraccionaria del circuito RC, en los trabajos Ref. [1], [10]; el paso de la derivada ordinaria a la fraccionaria es directa, en Ref. [2]; se

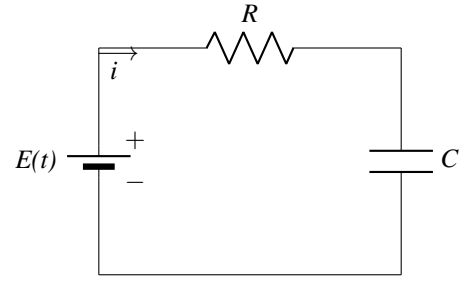


Fig. 1. Circuito Eléctrico RC

ha propuesto una forma sistemática de construir ecuaciones diferenciales fraccionarias; para esto se propuso la transición del operador derivado ordinario al operador fraccionario de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \longrightarrow \frac{1}{\sigma^{1-\alpha}} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \quad (13)$$

Donde $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ y σ es un parámetro que representa los componentes de tiempo fraccionario en el sistema.

A. Circuito RC Ordinario

De la misma manera se traduce desde la Ecuación. (12)

$$\begin{aligned} R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} &= E(t) \\ \frac{d}{dt} V_c(t) + V_c(t) \frac{1}{RC} &= \frac{E(t)}{RC} \end{aligned} \quad (14)$$

Para

$$P(t) = \frac{1}{s}, V_c(t) = \frac{E(t)}{RC} \quad (15)$$

Al multiplicar por su factor integrante $e^{\frac{t}{RC}}$, se tiene.

$$\begin{aligned} \frac{d}{V_c(t)} (V_c(t) e^{\frac{t}{RC}}) &= \frac{E(t) e^{\frac{t}{RC}}}{RC} \\ V_c(t) e^{\frac{t}{RC}} &= \frac{E(t)}{RC} \int e^{\frac{t}{RC}} dt \\ &= \frac{E(t) RC}{RC} \int e^u du \\ V_c(t) &= E(t) e^{-\frac{t}{RC}} + k e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned} \quad (16)$$

Cuando $E_0 = 20V$, $V_0 = 0V$, $R = 100\Omega$ y $C = 4700\mu F$ en la ecuación (16).

$$\begin{aligned} V_c(t=0) &= k e^{-\frac{1}{RC} \cdot 0} + 20 \\ V_0 &= k + 20 \\ k &= -20 \end{aligned} \quad (17)$$

Se obtiene al reemplazar la Ecuación (17) en la Ecuación (16).

$$V_c(t) = 20(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (18)$$

La Figura 2. muestra la gráfica de la función (18), que es la solución de la ecuación diferencial (14) para un capacitor descargado.

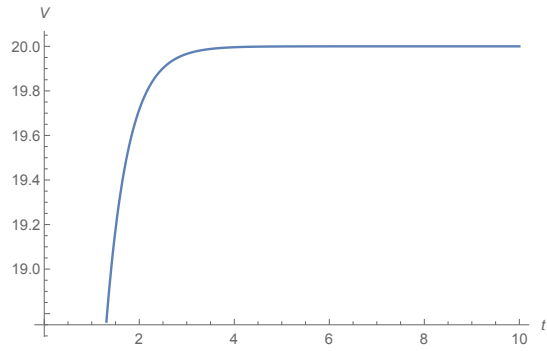


Fig. 2. Solución del circuito RC para un capacitor descargado.

También para. $E_0 = 0V$, $V_0 = 20V$, $R = 100\Omega$ y $C = 4700\mu F$ en la ecuación (16).

$$\begin{aligned} V_c(t=0) &= ke^{-\frac{t}{RC}} + 0 \\ V_0 &= k \\ k &= 20 \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene al reemplazar la ecuación (19) en la ecuación (16).

$$V_c(t) = 20e^{-\frac{t}{RC}} \quad (19)$$

La Figura 3. Muestra la gráfica de la función (19), que es la solución de la ecuación diferencial (14) para un capacitor cargado.

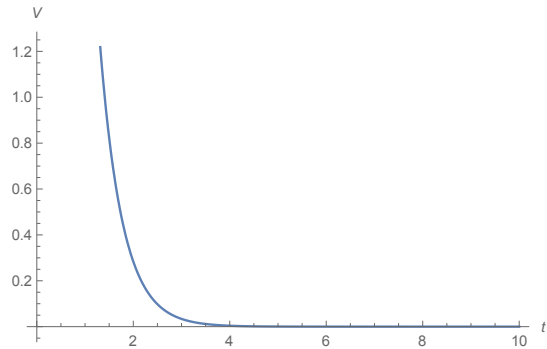


Fig. 3. Solución del Circuito RC para un Capacitor Cargado

IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A. Ecuación Diferencial Fraccionaria del Circuito RC

Utilizando la transición del operador derivado ordinario al operador fraccionario ecuación Ref. (13); Es decir el modelo del circuito eléctrico RC se transforma en un modelo circuito eléctrico RC de orden fraccionaria así como sigue:

$${}_0D_t^\alpha V_c(t) + \frac{V_c(t)}{(RC)^\alpha} = \frac{E(t)}{(RC)^\alpha}, \alpha \in (0, 1] \quad (20)$$

Aplicando la transformada de Laplace para la derivada de Caputo y Caputo-Fabrizio.

B. Solución del Circuito RC Fraccionaria a Través de la Derivada de Caputo.

• Fuente constante.

Considerando $\frac{1}{(RC)^\alpha} = \tau^\alpha$, $E(t) = E_0$, $V(0) = V_0$; $V_0 \geq 0$. Reemplazando las condiciones iniciales en ecuación (20) Aplicando la transformada de Laplace obtenemos.

$$\mathcal{L}\{ {}_0^C D_t^\alpha V_c(t) \} = \mathcal{L}\{ E_0 \tau^\alpha \} - \mathcal{L}\{ V_c(t) \tau^\alpha \} \quad (21)$$

$$V_c(s) = \frac{s^{\alpha-1} V_0}{s^\alpha + \tau^\alpha} - \frac{E_0 s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \tau^\alpha} + \frac{E_0}{s} \quad (22)$$

Por Transformada inversa de Laplace se tiene.

$$V_c(t) = E_0 + (V_0 - E_0) E_{\alpha,1}(-\tau^\alpha \cdot t^\alpha) \quad (23)$$

La Figura 4. Muestra la gráfica de la función (23), para $E_0 = 20V$, $V_0 = V(0)$, $R = 100\Omega$ y $C = 4700\mu F$.

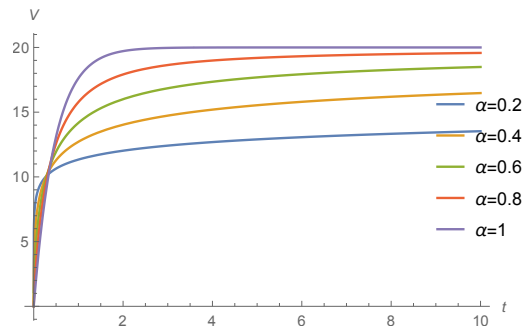


Fig. 4. Solución para Fuente Constante; Capacitor Descargado

La Figura 5. Muestra la gráfica de la función (23), para $E_0 = V(0)$, $V_0 = 20V$, $R = 100\Omega$ y $C = 4700\mu F$.

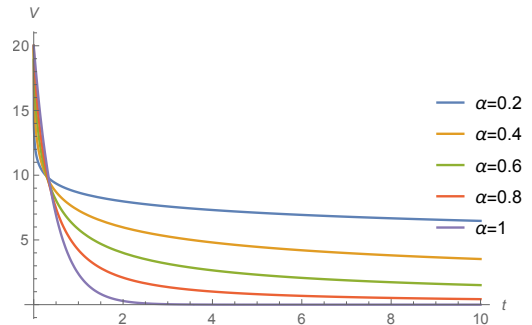


Fig. 5. Solución para Fuente Constante; Capacitor Cargado

• Fuente periódica. Considerando $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$, $V(0) = V_0$; $V_0 \geq 0$, $\frac{1}{(RC)^\alpha} = \tau^\alpha$

Reemplazando las condiciones iniciales en la ecuación (20) y Aplicando la transformada de Laplace se obtiene.

$$\mathcal{L}\{ {}_0^C D_t^\alpha V_c(t) \} + \mathcal{L}\{ V_c(t) \tau^\alpha \} = \mathcal{L}\{ E_0 \tau^\alpha \sin(\omega t) \} \quad (24)$$

$$V_c(s) = E_0 \tau^\alpha \frac{\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}}{s^\alpha + \tau^\alpha} + V_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \tau^\alpha} \quad (25)$$

Por Transformada inversa de Laplace se tiene.

$$\begin{aligned} V_c(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ E_0 \tau^\alpha \frac{\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}}{s^\alpha + \tau^\alpha} \right\} \\ &\quad + V_0 E_\alpha \left(-\left(\frac{t}{RC}\right)^\alpha \right), \\ &\quad \beta = 1, \lambda = -\tau^\alpha, \text{ en (6)} \\ &= V_0 E_\alpha \left(-\left(\frac{t}{RC}\right)^\alpha \right) + E_0 \tau^\alpha \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} \frac{1}{s^\alpha + \tau^\alpha} \right\} \\ V_c(t) &= V_0 E_\alpha \left(-\left(\frac{t}{RC}\right)^\alpha \right) + E_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} \frac{\tau^\alpha}{s^\alpha + \tau^\alpha} \right\} \\ &= V_0 E_\alpha \left(-\left(\frac{t}{RC}\right)^\alpha \right) + E_0 \sin(\omega t) * \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{-\tau^\alpha}{s^\alpha - (-\tau^\alpha)} \right\} \\ &= V_0 E_\alpha \left(-\left(\frac{t}{RC}\right)^\alpha \right) - E_0 \sin(\omega t) * E'_\alpha(-\tau t)^\alpha, \text{ para } \lambda = -\tau^\alpha \\ &= V_0 E_\alpha \left(-\left(\frac{t}{RC}\right)^\alpha \right) - E_0 \int_0^t \sin \omega(t-u) E'_\alpha(-\tau u)^\alpha du \end{aligned}$$

Por tanto.

$$\begin{aligned} V_c(t) &= V_0 E_\alpha \left(-\left(\frac{t}{RC}\right)^\alpha \right) \\ &\quad - E_0 \int_0^t \sin \omega(t-u) E'_\alpha(-\tau u)^\alpha du \end{aligned} \quad (26)$$

La gráfica de la función (26) para capacitor descargado; no fue posible obtener con el software Mathematica 10.4 la misma se encuentra en Ref. [11].

La Figura 6. Muestra la gráfica de la función (26), para $E_0 = V(0)$, $V_0 = 20V$, $R = 100\Omega$ y $C = 4700\mu F$.

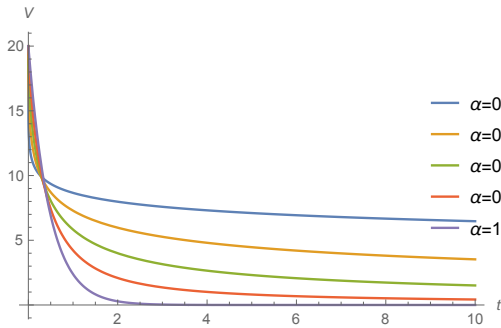


Fig. 6. Solución para Fuente periódica; capacitor cargado.

C. Solución del Circuito RC Fraccionaria a Través de la Derivada de Caputo-Fabrizio.

• Fuente constante.

Considerando $\frac{1}{(RC)^\alpha} = \tau^\alpha$, $E(t) = E_0$, $V(0) = V_0$; $V_0 \geq 0$.

Reemplazando las condiciones iniciales en (20) Aplicando la transformada de Laplace se obtiene.

$$\mathcal{L}\{ {}_0^{CF} D_t^\alpha V_c(t) \} = \mathcal{L}\{ \tau^\alpha E_0 \} - \mathcal{L}\{ \tau^\alpha V_c(t) \} \quad (27)$$

Además.

$$\mathcal{L}\{ {}_0^{CF} D_t^\alpha V_c(t) \} = \frac{sV_c(s) - V_0}{s + \alpha(1-s)}, \text{ por (10)} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{sV_c(s) - V_0}{s + \alpha(1-s)} &= \tau^\alpha \frac{E_0}{s} - \tau^\alpha V_c(s) \\ sV_c(s) - V_0 &= \tau^\alpha \frac{E_0}{s} (s + \alpha(1-s)) - \tau^\alpha V_c(s) (s + \alpha(1-s)) \\ V_c(s) (s + \tau^\alpha (s + \alpha(1-s))) &= \tau^\alpha \frac{E_0}{s} (s + \alpha(1-s)) + V_0 \\ V_c(s) &= \frac{\frac{E_0}{s} (\tau^\alpha (s + \alpha(1-s))) + V_0}{s + \tau^\alpha (s + \alpha(1-s))} \\ &= \frac{E_0 s + \tau^\alpha (s + \alpha(1-s)) - s}{s} + \frac{V_0}{s + \tau^\alpha (s + \alpha(1-s))} \\ &= \frac{E_0}{s} - \frac{E_0}{s + \tau^\alpha (s + \alpha(1-s))} + \frac{V_0}{s + \tau^\alpha (s + \alpha(1-s))} \\ &= \frac{E_0}{s} - \frac{E_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{1}{s + \frac{\alpha\tau^\alpha}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha}} \\ &\quad + \frac{V_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{1}{s + \frac{\alpha\tau^\alpha}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha}}, \end{aligned}$$

$$\text{donde: } \frac{1}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{1}{s + \frac{\alpha\tau^\alpha}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha}} = \frac{1}{s + \tau^\alpha (s + \alpha(1-s))}$$

$$V_c(s) = \frac{E_0}{s} + \frac{V_0 - E_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{1}{s + \frac{\alpha\tau^\alpha}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha}} \quad (29)$$

Transformada inversa de Laplace en (29) se tiene.

$$V_c(t) = E_0 + \frac{V_0 - E_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \cdot e^{(-\Delta \cdot t)} \quad (30)$$

$$\text{donde } \Delta = \frac{\alpha\tau^\alpha}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha}$$

La Figura 7. Muestra la gráfica de la función (30), para $E_0 = V(0)$, $V_0 = 20V$, $R = 100\Omega$ y $C = 4700\mu F$.

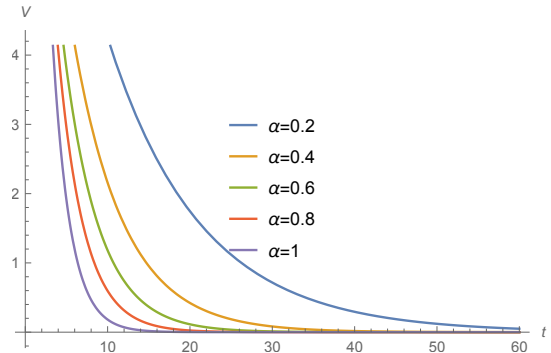


Fig. 7. Solución para Fuente constante; capacitor cargado.

La Figura 8. muestra la gráfica de la función 30, para $E_0 = 20V$, $V_0 = V(0)$, $R = 100\Omega$ y $C = 4700\mu F$.

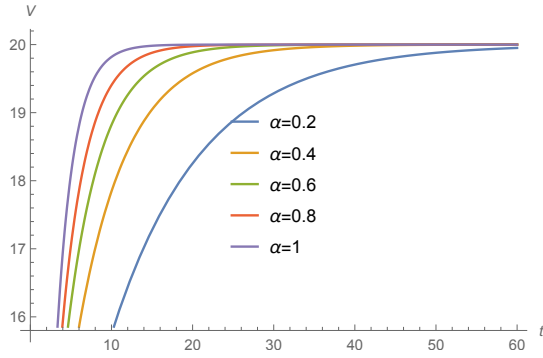


Fig. 8. Solución para Fuente constante; capacitor descargado.

- **Fuente periódica.** Considerando $\frac{1}{(RC)^\alpha} = \tau^\alpha$, $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$, $V(0) = V_0$; $V_0 \geq 0$

Reemplazando las condiciones iniciales en la ecuación (20) y Aplicando la transformada de Laplace se obtiene. $\mathcal{L}\{ {}_0^{CF}D_t^\alpha V_c(t) \} = \mathcal{L}\{ \tau^\alpha E_0 \sin(\omega t) \} - \mathcal{L}\{ \tau^\alpha V_c(t) \}$

$$\mathcal{L}\{ {}_0^{CF}D_t^\alpha V_c(t) \} = \frac{sV_c(s) - V_0}{s + \alpha(1-s)} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{sV_c(s) - V_0}{s + \alpha(1-s)} &= \tau^\alpha E_0 \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} - \tau^\alpha V_c(s) \\ sV_c(s) &= \tau^\alpha E_0 (\alpha + (1-\alpha)s) \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \\ &\quad - \tau^\alpha V_c(s) (\alpha + (1-\alpha)s) + V_0 \\ V_c(s)(s + \tau^\alpha (s + \alpha(1-s))) &= V_0 + \tau^\alpha E_0 (\alpha + (1-\alpha)s) \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \\ V_c(s) &= \frac{V_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{1}{s + \frac{\alpha\tau^\alpha}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha}} \\ &\quad + \frac{\tau^\alpha E_0 \omega}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \cdot \frac{\alpha + (1-\alpha)s}{(s^2 + \omega^2)(s + \frac{\alpha\tau^\alpha}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha})} \end{aligned}$$

Para $\Delta = \frac{\alpha\tau^\alpha}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha}$

$$\begin{aligned} V_c(s) &= \frac{V_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{1}{s + \Delta} \\ &\quad + \frac{\tau^\alpha E_0 \omega}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \cdot \frac{\alpha + (1-\alpha)s}{(s^2 + \omega^2)(s + \Delta)} \\ \frac{\alpha + (1-\alpha)s}{(s^2 + \omega^2)(s + \Delta)} &= \frac{Xs + Y}{s^2 + \omega^2} + \frac{Z}{s + \Delta} \quad (32) \\ &= \frac{Xs^2 + \Delta Xs + Ys + Y\Delta + Zs^2 + Z\omega^2}{(s^2 + \omega^2)(s + \Delta)} \\ \alpha + (1-\alpha)s &= (X + Z)s^2 \\ &\quad + (\Delta X + Y)s + (Y\Delta + Z\omega^2) \end{aligned}$$

Por fracciones parciales desde la ecuación (32)

$$X = -\frac{\alpha(1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha)}{\omega^2(1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha)^2 + \alpha^2\tau^2\alpha} \quad (33)$$

$$Y = \frac{(1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha)[\alpha^2\tau^\alpha + (1 - \alpha)\omega^2(1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha)]}{\omega^2(1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha)^2 + \alpha^2\tau^2\alpha} \quad (34)$$

$$Z = \frac{\alpha(1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha)}{\omega^2(1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha)^2 + \alpha^2\tau^2\alpha} \quad (35)$$

Sustituyendo X, Y, Z en la ecuación (32).

$$\begin{aligned} V_c(s) &= \frac{\tau^\alpha \omega E_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \left(\frac{Xs + Y}{s^2 + \omega^2} + \frac{Z}{s + \Delta} \right) \\ &\quad + \frac{V_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{1}{s + \Delta} \\ &= \frac{\tau^\alpha \omega Z E_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{1}{s + \Delta} + \frac{V_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{1}{s + \Delta} \\ &\quad + \frac{\tau^\alpha \omega X E_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{1}{s^2 + \omega^2} + \frac{\tau^\alpha Y E_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \frac{1}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Al aplicar la Transformada inversa de Laplace se tiene.

$$\begin{aligned} V_c(t) &= \frac{\tau^\alpha \omega X E_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \cos(\omega t) \\ &\quad + \frac{\tau^\alpha Y E_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \sin(\omega t) \\ &\quad + e^{(-\Delta \cdot t)} \cdot \frac{\tau^\alpha \omega Z E_0 + V_0}{1 + \tau^\alpha - \alpha\tau^\alpha} \quad (36) \end{aligned}$$

La Figura (9). Muestra la gráfica de la función (36), para $E_0 = V(0)$, $V_0 = 20V$, $R = 100\Omega$ y $C = 4700\mu F$.

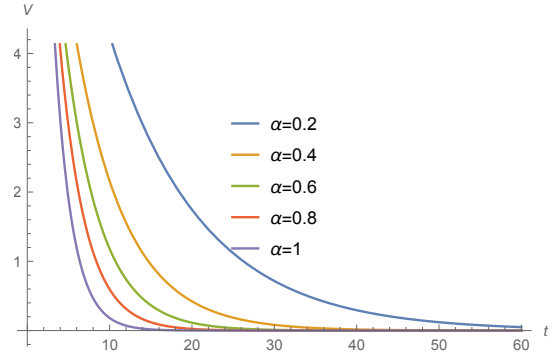


Fig. 9. Solución para Fuente periódica; capacitor cargado.

La Figura 10. Muestra la gráfica de la función (36), para $E_0 = 20V$, $V_0 = V(0)$, $R = 100\Omega$ y $C = 4700\mu F$.

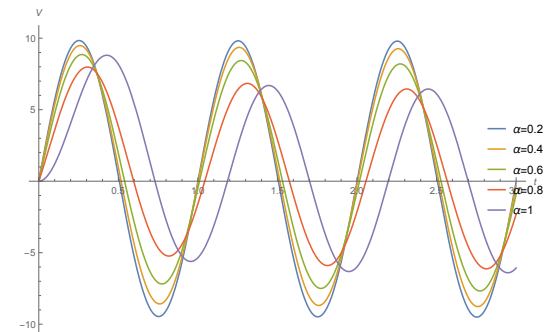


Fig. 10. Solución para Fuente periódica; capacitor descargado.

V. CONCLUSIONES

Se ha establecido una analogía entre las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones diferenciales fraccionarias mediante los operadores fraccionarios de Caputo y Caputo-Fabrizio. La cual nos permite analizar y simular el comportamiento del circuito eléctricos RC, también se obtuvo el modelo del circuito RC fraccionario (20) utilizando las leyes físicas y la transición del operador derivado ordinario al operador fraccionario, luego para la solución analítica de $V_c(t)$ con diferentes valores iniciales se analizó la función especial Mittag-Leffler, la transformada de Laplace y su inversa de algunas funciones, finalmente considerando una fuente constante y fuente periódica del modelo circuitos eléctricos RC fraccionario, se realizaron las simulaciones Figuras del 4 al 10 utilizando el software Wolfram Mathematica 10.4, en los cuales se aprecia el desplazamiento de orden $\alpha \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ respecto al tiempo t permitiendo así un análisis óptimo del comportamiento $V_c(t)$.

REFERENCIAS

- [1] Gómez-Aguilar, J. F., R. Razo-Hernández, and D. Granados-Lieberman. "A physical interpretation of fractional calculus in observable terms: analysis of the fractional time constant and the transitory response." *Revista mexicana de física* 60.1 (2014): 32-38.
- [2] Gómez-Aguilar, JF, et al. "Osciladores mecánicos fraccionarios". *Revista mexicana de física* 58.4 (2012): 348-352.
- [3] INGA YOYERA, Fabian. *Ecuaciones diferenciales fraccionarias lineales con coeficientes constantes*. 2019.
- [4] Lin, Da, et al. "Estudio experimental del modelo de circuito RC de orden fraccionario utilizando las derivadas de Caputo y Caputo-Fabrizio". *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers* 68.3 (2021): 1034-1044.
- [5] Velásquez Ayma, A. "Modelos matemáticos del movimiento de un proyectil mediante la existencia de las ecuaciones diferenciales fraccionarias no lineal." (2019).
- [6] Flores Flores, David. "Una introducción a las ecuaciones diferenciales fraccionarias."
- [7] Semary, M. S., A. G., and Hassan H. N. "Fundamentals of fractional-order LTI circuits and systems: number of poles, stability, time and frequency responses." *International Journal of Circuit Theory and Applications* 44.12 (2016): 2114-2133.
- [8] Losada Rodríguez, J. *Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario y aplicaciones*. Diss. 2018.
- [9] Dorf, Richard, and James Svoboda. *Circuitos eléctricos*. Alpha Editorial, 2015.
- [10] Gómez-Aguilar, J. F., et al. "Analytical and numerical solutions of electrical circuits described by fractional derivatives." *Applied Mathematical Modelling* 40.21-22 (2016): 9079-9094.
- [11] Morales-Delgado, V. F., et al. "Fractional operator without singular kernel: applications to linear electrical circuits." *International Journal of Circuit Theory and Applications* 46.12 (2018): 2394-2419.
- [12] Al-Refai, Mohammed, and Muhammed Syam. "Analysis of Multiterm Initial Value Problems with Caputo-Fabrizio Derivative." *Journal of Mathematics* 2021.1 (2021): 8231828.
- [13] Cohen, Alan M. *Métodos numéricos para la inversión de la transformada de Laplace*. Vol. 5. Springer Science and Business Media, 2007.
- [14] THOMAS, FLOYD. *Principios de circuitos electrónicos*. Pearson Educación, 2007.
- [15] Freire Llive, D. *Guía didáctica para la utilización del simulador EC-Studio en el proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la Ley de Ohm en los estudiantes del Segundo Año de B.G.U. en la Unidad Educativa Municipal Antonio José de Sucre, año lectivo 2022-2023*. Quito: UCE. Disponible en: <http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/25000/30422>
- [16] Frías, Coronel, and M. T. "Equivalencias entre las Propiedades de las Derivadas Fraccionarias y las Derivadas Clásicas." (2017).
- [17] Hayt, William Hart, et al. *Análisis de circuitos en ingeniería*. McGraw Hill, 2012.
- [18] Herrera, M. F. G, et al. "Ecuaciones diferenciales fraccionarias y sus aplicaciones a la ingeniería." (2017).
- [19] Irwin, J. David, and Alvarado E. V. *Análisis básico de circuitos en Ingeniería*. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1997.
- [20] Jaimes Sallo, M, and Sacatuma Cruz, M. "Circuitos eléctricos modelado mediante ecuaciones diferenciales de orden fraccionario." (2016).
- [21] Juárez, A. R. "Ley de Ohm." (2019).
- [22] Kilbas, Anatolii Aleksandrovich, Hari M. Srivastava y Juan J. Trujillo. *Teoría y aplicaciones de ecuaciones diferenciales fraccionarias*. Vol. 204. Elsevier, 2006.
- [23] Kurt, C, Fernandez A. and Özarslan, M. A. "Two unified families of bivariate Mittag-Leffler functions." *Applied Mathematics and Computation* 443 (2023): 127785.
- [24] López, Alexis Tadeo Silvan, and García, J. R. "EL CIRCUITO ELÉCTRICO RC DE ORDEN ARBITRARIO." *JÓVENES EN LA CIENCIA* 2.1 (2016): 1541-1545.
- [25] López Mamani, M. "Ecuación de calor y de onda mediante una ecuación diferencial de orden fraccional." (2019).
- [26] Pacheco, S. "Transformada de Laplace: Algunas aplicações." *Mono-grafia submetida à Universidade Federal de Santa Catarina para obtenção do grau de Especialista em Matemática* (2011).
- [27] Podlubny, I. *Ecuaciones diferenciales fraccionarias: una introducción a las derivadas fraccionarias, ecuaciones diferenciales fraccionarias, a los métodos de su solución y algunas de sus aplicaciones*. Elsevier, 1998.
- [28] Quezada, N. "Metodología de la investigación, estadística aplicada en la investigación." *Empresa Edit. Macro EIRL 1º Edic.*, Lima (2010).
- [29] Rodríguez Perdomo, D. F. "Cálculo Fraccional: Un enfoque a la Teoría de Riemann-Liouville." *Fundación Universitaria Konrad Lorenz* (2008).
- [30] Rodríguez Martín, M. "Introducción al cálculo fraccionario ya los modelos de crecimiento tumoral clásicos y fraccionarios: simulaciones numéricas en el entorno del cálculo fraccionario." (2020).
- [31] Segura, Restrepo, and Paulina M. "Aplicación de la función Mittag-Leffler en la resolución de ecuaciones diferenciales de orden fraccional." (2019).
- [32] SPIEGEL, M. R. . "Transformadas de Laplace." *Schaum's Mcgraw-Hill* (1998).
- [33] Teodoro, G.S., Oliveira, D. S. and Oliveira, E. "Sobre derivadas fraccionarias." *Revista Brasileira de Ensino de Física* 40 (2017).
- [34] VILLEGAS DÍAZ, M., and OJEDA, N. R. "SOLUCIÓN ANALÍTICA DE UN K-LAPLACIANO FRACCIONARIO RADIAL."
- [35] Zambrano-Serrano, E., et al. "Comportamiento de orden fraccionario en la respuesta de un circuito RC mediante derivada de núcleo singular." *Ingenierías* 24.91 (2021): 22-32.